Curso de Mecánica Celeste

Lección nro 1

Unidad nro 1

Introducción

La Mecánica Celeste, ciencia que estudia el movimiento de los astros, nace recién en el siglo XVIII cuando Isaac Newton enuncia su “Ley de Gravitación Universal”: “La fuerza F, de atracción entre dos partículas, P_1 (de masa m_1) y P_2 (de masa m_2), actúa sobre la recta que las une con una intensidad que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r que las separa”

$$F = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ Nm^2 / kg^2$ es la constante de gravitación universal.

Se llama partícula a un cuerpo cuyas dimensiones se desprecian al describir su movimiento.
El movimiento aparente de los cuerpos celestes llamó poderosamente la atención del hombre desde la más remota antigüedad y una de sus mayores preocupaciones fue la de explicar las causas de estos movimientos.
Antes de que Galileo (1564 – 1642) construyera su primer telescopio, las observaciones se hacían a ojo desnudo, razón por la cual no podían observarse estrellas más débiles que las de sexta magnitud y solo se conocían cinco planetas, Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno. Al planeta Urano lo descubre por observación telescópica el astrónomo Herschel en 1781. Neptuno (1846) y Plutón (1930) se observan en cambio después que por el método de perturbaciones de la Mecánica Celeste resulta probada matemáticamente su existencia.
La observación de la posición y movimientos de los cuerpos celestes hizo que se conociera:

1) El movimiento aparente diurno de la esfera celeste en sentido retrógrado (este a oeste), movimiento del que participan todos los astros sin excepción, ya que es una consecuencia de la rotación de la Tierra en sentido contrario.
2) El desplazamiento de los planetas a través de las estrellas. A las estrellas las llamaban fijas pues no se observaban cambios en sus posiciones relativas, formando siempre las mismas figuras llamadas constelaciones.
   El movimiento aparente de los planetas con respecto a las estrellas, visto desde la Tierra, es directo en la mayor parte de su recorrido y en ciertas épocas retrógrado.

3) El movimiento directo de la Luna de doce o trece grados por día y el tiempo que tarda en ocupar la misma posición con respecto a las estrellas (mes sideral). En dos noches consecutivas puede notarse su cambio de posición con respecto a las estrellas.
4) El desplazamiento aparente del Sol de un grado por día hacia el Este, consecuencia de la traslación de la Tierra. No puede observarse de día, puesto que las estrellas no son visibles, pero si se mira hacia el oeste un rato después de la puesta del Sol se observará una constelación Zodiacal, un mes después a la misma hora se notará que esa constelación ha desaparecido pues se ha puesto con el Sol. En el transcurso de un año el Sol recorre la eclíptica y pasa por las doce constelaciones Zodiacales permaneciendo un mes en cada una.

Posiciones de los planetas con respecto al Sol y la Tierra:

Llamaremos Elongación a la diferencia de longitudes de un planeta y el Sol.
Para los planetas superiores puede alcanzar hasta 180^0 ; para los inferiores no llegan a los 90^0 .
Caso de un planeta inferior (fig. 1):

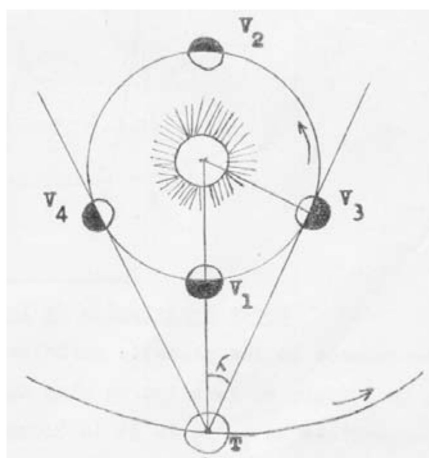

Fig. 1

Si la elongación es de es igual a 0^0 se dice que hay Conjunción. Los planetas inferiores presentan dos Conjunciones . Venus se halla en Conjunción Inferior en la posición V_1 y en conjunción Superior en la V_2.
Se llama Disgresión de un planeta inferior al valor máximo de la Elongación. Para el planeta Venus en la posición V_3 y V_4 tenemos:

sen $\lambda = SV_3 / ST = 0{,}7/1$, pues venus está a 0,7 UA del Sol , recordar que 1 UA es la distancia de la Tierra al Sol. Por lo tanto el arcsen 0,7 = 46^0 y para Mercurio este valor es de 29^0 .
Teniendo en cuenta el valor de las Disgresiones deducimos que a Mercurio y Venus se los ve siempre próximos al Sol, antes de la salida o después de la puesta.

Caso de un planeta superior (fig. 2):

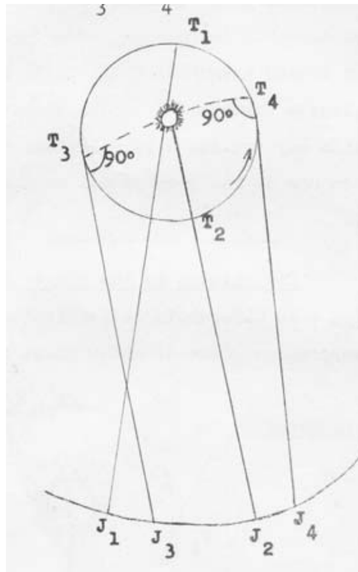

Fig. 2

Para los planetas superiores las elongaciones pueden tocar todos los valores comprendidos entre 0^0 y 180^0 .
Si $\lambda = 0^0$ Conjunción en la posición J_1
Si $\lambda = 180^0$ Oposición en la posición J_2
Si $\lambda = 90^0$ Cuadratura en la posición J_3 y J_4

Leyes de Kepler

El astrónomo alemán Juan Kepler (1571 – 1630) deduce geométricamente, basándose en sus observaciones y en la de su maestro Tycho Brahe, las tres leyes que rigen el movimiento de los planetas.

Primera Ley: Las órbitas de los planetas alrededor del Sol son elipses, en las cuales el Sol ocupa uno de los focos.
Sea una órbita elíptica, si S es la posición del Sol en un foco (Fig. 3) y P la de un planeta, la ecuación polar de la elipse es:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(\theta - \omega)}$$

En esta ecuación :

r = SP es el radio vector

θ = ángulo NSP es el argumento, medido en sentido directo a partir de un eje arbitrario SN
ω = ángulo NSA argumento del perihelio A
a = semieje mayor de la elipse
e = excentricidad de la elipse

Si $\theta = \omega$ $r = a(1-e)$ valor mínimo de r correspondiente al perihelio A
Si $\theta - \omega = 180^0$ $r = a(1 + e)$ valor máximo de r, correspondiente al afelio B

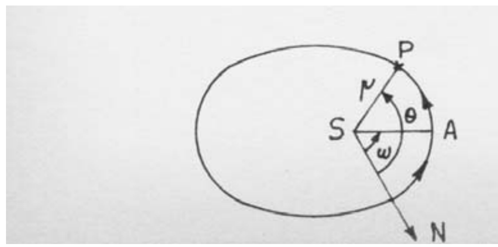

Fig. 3

<u>Segunda Ley</u> : El radio vector que une el centro del Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales (fig. 4).
Si el tiempo en que el planeta recorre el arco $P\widehat{Q}$ es igual al que tarda en recorrer el arco $P_1\widehat{Q}_1$ resulta:

$$\text{Área } PSQ = \text{Área } P_1SQ_1$$

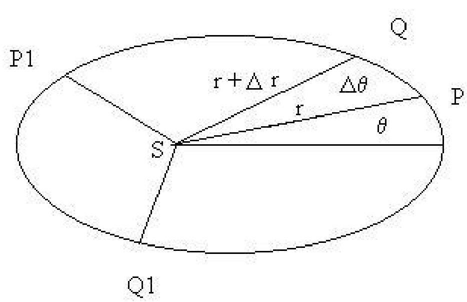

Fig. 4

<u>Otro enunciado es</u>: La velocidad areal de un planeta en la órbita es constante.

Si $P(r,\theta)$ es la posición del planeta en el instante t y $Q(r + \Delta r\ ,\ \theta + \Delta\theta)$ su posición en el instante $t + \Delta t$, llamando ΔA al área del triángulo PSQ resulta:

$$\Delta A = \frac{r(r+\Delta r)}{2} \operatorname{sen} \Delta\theta$$

Cuando $\Delta\theta \rightarrow 0$ $\frac{\text{Área PSQ}}{\text{Área triángulo PSQ}} \rightarrow 1$ es decir que puede sustituirse al área del triángulo por la del área barrida por vector PS o sea PSQ.

Luego $\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t}$ es la velocidad areal del planeta en su órbita.

escribiendo : $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{r(r+\Delta r)}{2} \frac{\operatorname{sen}\Delta\theta}{\Delta\theta} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

Luego $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$ pues $\frac{\operatorname{sen}\Delta\theta}{\Delta\theta} \rightarrow 1$ y $\Delta r \rightarrow 0$

entonces

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \qquad (1)$$

La expresión de la segunda ley de Kepler es entonces:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h$$

en la cual el primer miembro es el doble de la velocidad areal y h una constante arbitraria.

Pasando a coordenadas cartesianas:
$x = r \cos \theta$
$y = r \operatorname{sen} \theta$
$\theta = \text{arc. tg } (y / x)$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{x^2}$$

y como $x^2 + y^2 = r^2$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r^2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$$

Sustituyendo en (1)

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt})$$

Si el movimiento no se cumple en el plano xy, con respecto a una terna xyz las proyecciones de las velocidades areales sobre los tres planos resulatan:

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{xy}=\frac{1}{2}\left(xy'-\ yx'\right)$$

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{yz}=\frac{1}{2}\left(yz'-zy'\right)$$

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{zx}=\frac{1}{2}\left(zx'-xz'\right)$$

<u>Tercera Ley</u> : Los cuadrados de los períodos siderales de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas.
Si P_1 y P_2 son los períodos de revolución de dos planetas alrededor del Sol y a_1 y a_2 los semiejes mayores de las respectivas órbitas, se cumple:

$$\frac{a^3{}_1}{P^2{}_1}=\frac{a^3{}_2}{P^2{}_2}$$

Esta expresión es aproximada pues en ella se han despreciado los valores de las masas de los planetas.
Como veremos al tratar el problema de los dos cuerpos la expresión correcta de la tercera ley es:

$$\frac{a^3}{P^2}=\frac{G(m_0+m)}{4\pi^2}$$

donde m_0 = masa del Sol   m = masa del planeta

Luego para un planeta P_1 :

$$\frac{a^3{}_1}{P^2{}_1}=\frac{G(m_0+m_1)}{4\pi^2}$$

para el P_2 :

$$\frac{a^3{}_2}{P^2{}_2} = \frac{G(m_0 + m_2)}{4\pi^2}$$

y la relación entre dos planetas :

$$\frac{a^3{}_1}{P^2{}_1(m_0 + m_1)} = \frac{a^3{}_2}{P^2{}_2(m_0 + m_2)}$$

Las leyes de Kepler son leyes empíricas, pero Isaac Newton logró probar la validez de las mismas basándose en su ley de Gravitación Universal.

Dr. Raúl Roberto Podestá
Coordinador Sección Cohetería Civil
Coordinador Sección Planetas
LIADA - Liga Iberoamericana de Astronomía
Director del Observatorio Astronómico "NOVA PERSEI"
Miembro y Observador de la AAVSO
(AAVSO – The American Association of Variable Star Observers)
http://ar.geocities.com/observatorionovapersei/
rpodesta@clorinda-fsa.com.ar
rrpodesta@hotmail.com