

Curso de Mecánica Celeste

Lección nro 2 (primera parte)

Unidad nro 2

Problema de dos cuerpos

Los movimientos, de un planeta alrededor del Sol, de la Luna alrededor de la Tierra, de la componente de una estrella binaria alrededor de la otra, pueden estudiarse suponiendo que los dos cuerpos se atraen a acuerdo a la ley de Newton y están aislados de la influencia gravitacional de todos los otros cuerpos.

Sean los cuerpos P_1 de masa m_1 y P_2 de masa m_2 considerados como partículas. El problema consiste en deducir la trayectoria de P_2 relativa a P_1 .

Si se toma un sistema no rotante de coordenadas cartesianas ortogonales con origen en P_1 y con respecto a dicho sistema las coordenadas de P_2 son (x, y, z) , fig.5, las ecuaciones de movimiento de P_2 relativo a P_1 resultan:

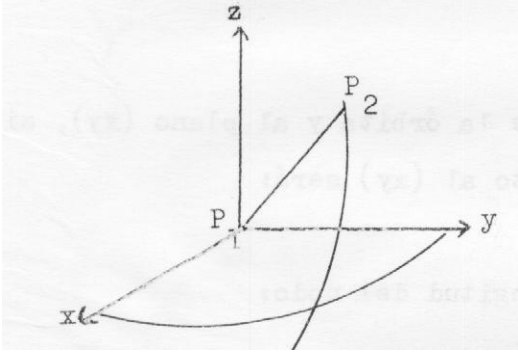

$$(1) \quad \begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\mu x}{r^3} \\ \ddot{y} = -\frac{\mu y}{r^3} \\ \ddot{z} = -\frac{\mu z}{r^3} \end{cases}$$

Fig. 5

en las cuales $\mu = G(m_1+m_2)$

Es un problema de sexto orden ya que se trata de un sistema de tres ecuaciones de segundo orden.

Ley de las áreas :

Multiplicando la primera de las ecuaciones por $-y$, la segunda por x y sumando se obtiene:

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0$$

la integral de esta ecuación es :

$$x \dot{y} - y \dot{x} = C \quad (2)$$

de manera análoga se obtiene:

$$y \dot{z} - z \dot{y} = A \quad (2)$$

$$z \dot{x} - x \dot{z} = B \quad (3)$$

A, B, C son constantes de integración y los primeros miembros de estas tres últimas expresiones son, como hemos vistos, las proyecciones del doble de la velocidad areal sobre los planos (xy), (yz) y (zx).

Plano de la órbita :

Las coordenadas de P_2 satisfacen la ecuación de un plano que pasa por el origen o sea por P_1 .

En efecto, multiplicando las ecuaciones (2) (3) (4) respectivamente por z, x, y y sumándolas se obtiene la ecuación de dicho plano :

$$Ax + By + Cz = 0 \quad (5)$$

Si P_1K (fig.6) es la normal al plano de la órbita , los cosenos directores de dicha normal, son de acuerdo a (5) , proporcionales a A, B, C.

Se h el doble del área barrida por el radio-vector en el plano de la órbita o sea:

$$h = r^2 \dot{\theta}$$

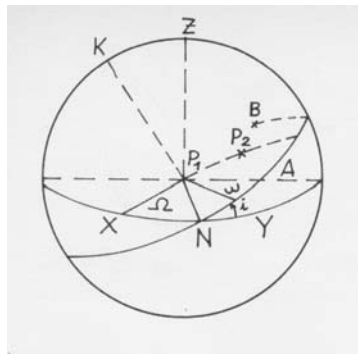


Fig. 6

Las proyecciones del radio vector P_1P_2 sobre los tres planos coordenados barrerán áreas dadas por (2) (3) (4), luego se tiene :

$$\dot{x} \dot{y} - y \dot{x} = h \cos K\hat{Z}$$

$$y \dot{z} - z \dot{y} = h \cos K\hat{X}$$

$$z \dot{x} - x \dot{z} = h \cos K\hat{Y}$$

El arco KZ es el ángulo que forma las normales al plano de la órbita y al plano (xy), si i es la inclinación del plano la órbita con respecto al (xy) será:

$$\cos KZ = \cos i$$

Si además en el triángulo esférico KXN : el arco XN = Ω longitud del nodo:

$$\cos KX = \sin \Omega \sin i$$

y en el triángulo KYN:

$$\cos KY = -\cos \Omega \sin i$$

Nota: KZ, KX, KY son arcos.

tendremos entonces :

$$A = h \sin \Omega \sin i$$

$$B = h \cos \Omega \sin i$$

$$C = h \cos i$$

de donde

$$h^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

o sea h es constante y se cumple la segunda Ley de Kepler.

$$\text{Además, } \tan \Omega = -A/B$$

$$\text{y } \tan i = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{C}$$

Ω : longitud del nodo

i : inclinación de la órbita

Estos fijan la posición del plano de la órbita con respecto al sistema de coordenadas.

Longitud del nodo e inclinación se refiere a un sistema de coordenadas cuyo plano (xy) coincida con la eclíptica y x apunta al equinoccio γ .

Ecuaciones de movimiento en el plano de la órbita

Tomando un sistema de coordenadas rectangulares con origen P_1 y eje P_1N y P_1M en el plano de la órbita, si P_1N es la dirección al nodo y las coordenadas de P_2 son (x, y) las ecuaciones de movimiento en el plano son:

$$\dot{x} = -\frac{\mu x}{r^3}$$

$$\dot{y} = -\frac{\mu y}{r^3}$$

ya que $z = 0$ y el problema se ha reducido entonces al cuarto orden.
Estas ecuaciones pueden escribirse :

$$m_2 \ddot{x} = -m_2 \frac{\mu}{r^2} \frac{x}{r}$$

$$m_2 \ddot{y} = -m_2 \frac{\mu}{r^2} \frac{y}{r}$$

Como x/r , y/r , son los cosenos directores de la dirección $P_1 P_2$ con respecto a los ejes coordenados las ecuaciones indican que el cuerpo P_2 está sujeto a una atracción $m_2 \mu / r^2$ en la dirección $P_1 P_2$. Luego la aceleración radial es $A_r = -\mu / r^2$ y la tangencial $A_t = 0$
Si la aceleración se expresa en coordenadas polares :

$$A_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}$$

$$A_t = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = 0$$

integrando esta última :

$$r^2 \dot{\theta} = h \quad \text{Ley de las áreas.}$$

NOTA: Los dos puntos sobre una letra significa derivada segunda y un punto derivada primera.

Dr. Raúl Roberto Podestá
Coordinador Sección Cohetería Civil
Coordinador Sección Planetas
LIADA - Liga Iberoamericana de Astronomía
Director del Observatorio Astronómico "NOVA PERSEI"
Miembro y Observador de la AAVSO
(AAVSO – The American Association of Variable Star Observers)
<http://ar.geocities.com/observatorionovapersei/>
rpodesta@clorinda-fsa.com.ar
rrpodesta@hotmail.com