Curso de Mecánica Celeste

Lección nro 3 (segunda parte de la unidad 2)

Unidad nro 2

Ecuación Polar de la órbita

Se obtiene eliminando t entre las ecuaciones:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\dfrac{\mu}{r^2} \quad (a) \\ r^2\,\dot{\theta} = h \quad (b) \end{cases}$$

De (b) : $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{h}{r^2}$

además:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \quad , \quad \frac{h}{r^2} = \text{-}h\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{d\theta}\left(-h\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} = -h\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\frac{h}{r^2}$$

reemplazando en (a):

$$\frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{\mu}{h^2}$$

La solución general de esta ecuación de segundo grado es:

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e\ \cos(\theta - \omega)}$$

en la cual e y ω son constantes de integración.
La ecuación obtenida es la ecuación polar de una cónica, es decir que se ha obtenido un resultado más general que el que corresponde a la primera ley de Kepler. La trayectoria P_2 relativo a P_1 puede ser una elipse, una parábola o una hipérbola según $e<1$, $e = 1$ o $e>1$.

<u>Tercera Ley de Kepler</u>

En el caso en que $0<e<1$, comparando la ecuación obtenida, con la ecuación polar de la elipse:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(\theta - \omega)}$$

resulta :

$$p = \frac{h^2}{\mu} = a(1 - e^2) \ \text{(c)} \quad \text{ordenada en el foco.}$$

En un tiempo P igual al de revolución de un planeta alrededor del Sol, el radio-vector barre el área encerrada por la elipse $A= \pi ab$, luego la velocidad areal es:

$$\frac{h}{2} = \frac{\pi ab}{P}$$

$$h = \frac{2\pi ab}{P}$$

Pero $2\pi/P = n$ es el movimiento medio del planeta en la órbita. En el caso de la Tierra
P = 365,2564 días medios y en ese tiempo el ángulo barrido es 2π , luego n es el ángulo que barre por día el radio-vector.

Entonces $\quad h = n\,a\,b = n\,a^2\sqrt{1-e^2}$

De (c) $\quad h = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$

igualando ambas expresiones se obtiene :

$$na^2\sqrt{1-e^2} = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$$

$$na^2 = \sqrt{\mu a}$$
$$n^2a^4 = \mu a$$
$$n^2a^3 = \mu = G(m_1 + m_2)$$
$$\left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 a^3 = G(m_1 + m_2)$$

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G}{(2\pi)^2}(m_1 + m_2)$$

y la relación para los dos planetas es:

$$\frac{a_1^3}{P_1^2(m_0 + m_1)} = \frac{a_2^3}{P_2^3(m_0 + m_2)}$$

como se vio anteriormente.

Masa de un planeta

Supongamos que m_0 , m_1 y m_2 son las masas del Sol, de un planeta y de un satélite del planeta.

Para el planeta se cumple:

$$\frac{a_1^3}{P_1^2} = \frac{G}{(2\pi)^2}(m_0 + m_1)$$

para el satélite:

$$\frac{a_2^3}{P_2^2} = \frac{G}{(2\pi)^2}(m_1 + m_2)$$

en el cual a_2 es el semieje de la elipse que describe el satélite relativa al planeta y P_2 es el período de revolución en dicha elipse.
De las dos últimas relaciones resulta:

$$\frac{m_1 + m_2}{m_0 + m_1} = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2$$

Si se desprecia la masa m_2 del satélite, como el segundo miembro es conocido, se obtiene:

$$\frac{m_1}{m_0 + m_1}$$ es decir la razón entre la masa del planeta y la del Sol.

Dr. Raúl Roberto Podestá
Coordinador Sección Cohetería Civil
Coordinador Sección Planetas
LIADA - Liga Iberoamericana de Astronomía
Director del Observatorio Astronómico "NOVA PERSEI"
Miembro y Observador de la AAVSO
(AAVSO – The American Association of Variable Star Observers)
http://ar.geocities.com/observatorionovapersei/
rpodesta@clorinda-fsa.com.ar
rrpodesta@hotmail.com