Curso de Mecánica Celeste

Lección nro 3 (tercera parte de la unidad 2)

Elementos de la órbita elíptica:

Seis son las constantes que se obtienen al integrar el sistema de ecuaciones planteado:

- Ω longitud del nodo
- i inclinación de la órbita
- W argumento del perihelio
- a semieje de la órbita
- e excentricidad

Falta obtener T época de pasaje por el perihelio.

Movimiento de un astro en una órbita elíptica:

Con respecto a un sistema de ejes coordenados que coincida con los ejes de la elipse, las ecuaciones paramétricas de la elipse son (Fig. 2 - II):

$$\begin{cases} x = a \cos u \\ y = b \operatorname{sen} u \end{cases}$$

En la elipse $v = \widehat{TSP}$ es la anomalía verdadera ángulo que forma el radio vector $\overline{ST} = r$ con la dirección al perihelio.

La ordenada de T corta al círculo de radio a en el punto T_1, el ángulo $\widehat{T_1OP} = u$ es la anomalía excéntrica.

Si e es la excentricidad $e = \frac{c}{a}$ luego $\overline{OS} = c = a\,e$

En el triángulo TT'S :

$$\overline{ST'} = r \cos v = x - a\,e = a\,(\cos u - e)$$

$$TT' = r \operatorname{sen} v = y = b \operatorname{sen} u = a\sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} u$$

resulta entonces:

$$r = a\,(1 - e \cos u)$$

$$\cos v = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u}$$

$$\operatorname{sen} v = \frac{\sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} u}{1 - e \cos u}$$

de la relación

$$\frac{1 - \cos v}{1 + \cos v} = \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}$$

se deduce:

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tg} \frac{u}{2}$$

Ecuación de Kepler:

$$r = a(1 - e \cos u)$$

derivando: $\dot{r} = a\,e \operatorname{sen} u\ \dot{u}$ (1)

De la ecuación de la órbita:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos v}{a(1 - e^2)}$$

derivando:
$$\frac{\dot{r}}{r^2} = \frac{e \operatorname{sen} v \, \dot{v}}{a(1 - e^2)}$$

y como $h = r^2 \dot{v} = n a^2 \sqrt{1 - e^2}$ (ley de las áreas)

$$\dot{r} = \frac{n a e \operatorname{sen} v}{\sqrt{1 - e^2}}$$

sustituyendo en esta expresión el valor de sen v:

$$\operatorname{sen} v = \frac{\sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} u}{1 - e \cos u}$$

de (1) y (2):

$$a e \operatorname{sen} u \, \dot{u} = \frac{n a e \operatorname{sen} u}{1 - e \cos u}$$

$$\dot{u} = \frac{n}{1 - e \cos u}$$

$$(1 - e \cos u) \, \dot{u} = n$$

integrando:

$$u - e \operatorname{sen} u = n t + C$$

Si $u = 0$ es $t = T$ época de pasaje por el perihelio

luego si $C = - n T$ la ecuación resulta:

$$u - e \operatorname{sen} u = n (t - T$$

$$u - e \operatorname{sen} u = M$$

En la ecuación de Kepler $n(t - T) = M$ es la <u>anomalía media del planeta</u> es decir es el valor de la anomalía si se considera que el movimiento es uniforme.

<u>Solución de la ecuación de Kepler</u>:

Si escribimos la ecuación en la forma

$$u = M + e \operatorname{sen} u$$

conocemos <u>e</u> y <u>M</u> debemos calcular <u>u</u>. Es una ecuación trascendente pues la incógnita figura como argumento de la función seno.

Aplicando un método iterativo se tiene:

$$u_1 = M$$
$$u_2 = M + e \operatorname{sen} M$$
$$u_3 = M + e \operatorname{sen} (M + e \operatorname{sen} M)$$
$$u_3 = M + e \operatorname{sen} M \cos (e \operatorname{sen} M) + e \cos M \operatorname{sen} (e \operatorname{sen} M)$$

Como para la mayoría de los planetas <u>e</u> es un valor pequeño, por ejemplo para la órbita terrestre $e = 0{,}01673$ puede hacerse entonces.

$$\cos (e \operatorname{sen} M) = 1$$
$$\operatorname{sen} (e \operatorname{sen} M) = e \operatorname{sen} M$$

y resulta como valor aproximado de u:

$$u = M + e \operatorname{sen} M + e^2 \operatorname{sen} M \cos M$$

$$u = M + e \operatorname{sen} M + \frac{1}{2} e^2 \operatorname{sen} 2M$$

<u>Otro método:</u>

Diferenciando la ecuación $u - e \operatorname{sen} u = M$

se obtiene $(1 - e \cos u)\, d u = d M$

luego $d u = \dfrac{d M}{1 - e \cos u}$

para los incrementos se cumple:

$$\Delta u_o = u - u_o = \frac{M - M_o}{1 - e \cos u_o}$$

Esta fórmula se aplica a partir de un valor aproximado u_o, para el cual la ecuación de Kepler dá:

$$M_o = u_o - e \operatorname{sen} u_o$$

Obtenido Δu_o se obtiene $u_1 = u_o + \Delta u_o$ y M_1 resolviendo la ecuación de Kepler. una segunda corrección será:

$$\Delta u_1 = \frac{M - M_1}{1 - e \cos u_1}$$

Se repite este procedimiento hasta obtener <u>u</u> con la precisión deseada.

<u>Velocidad de un planeta en su órbita:</u>

$$V^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2$$

$$X = a(\cos u - e) \qquad \text{luego } \dot{X} = - a \operatorname{sen} u\, \dot{u}$$

$$Y = a\sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} u \qquad \dot{Y} = a\sqrt{1 - e^2} \cos u\, \dot{u}$$

$$V^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 u\, \dot{u}^2 + a^2 (1 - e^2) \cos^2 u\, \dot{u}^2$$

$$V^2 = a^2 (1 - e^2 \cos^2 u)\, \dot{u}^2$$

De la ecuación de Kepler:

$$(1 - e \cos u)\, \dot{u} = n$$

luego $V^2 = n^2 a^2 \dfrac{1 + e \cos u}{1 - e \cos u} = \dfrac{\mu}{r} \left[2 - (1 - e \cos u)\right]$

y como $r = a(1 - e \cos u)$

$$V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

La velocidad puede también deducirse, en el caso general de las ecuaciones del problema de dos cuerpos:

$$\ddot{X} = -\frac{\mu}{r^3} X$$

$$\ddot{Y} = -\frac{\mu}{r^3} Y$$

Multiplicando la primera por $\dot{X}$, la segunda por $\dot{Y}$ y sumando:

$$\ddot{X}\dot{X} + \ddot{Y}\dot{Y} = -\frac{\mu}{r^3}(X\dot{X} + Y\dot{Y})$$

pero $X^2 + Y^2 = r^2$

luego $2X\dot{X} + 2Y\dot{Y} = 2r\dot{r}$

sustituyendo en la primera relación:

$$\ddot{X}\dot{X} + \ddot{Y}\dot{Y} = -\frac{\mu}{r^3} r\dot{r}$$

$$\ddot{X}\dot{X} + \ddot{Y}\dot{Y} = -\frac{\mu}{r^2}\dot{r}$$

integrando $\dfrac{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2}{2} = \dfrac{\mu}{r} + C_1$

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + C \quad \text{Integral de las fuerzas vivas.}$$

La constante de integración puede ser evaluada imponiendo la condición en el periastro:

$$r = q \qquad V^2 = (r\dot{v})^2$$

En el periastro el vector velocidad es perpendicular al radio vector, luego $\dot{r} = 0$ y como en coordenadas polares:

$$V^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{v})^2$$

$$V^2 = (r\dot{v})^2$$

De la ecuación polar de la órbita

$$P = \frac{h^2}{\mu}$$

además $h = r^2\dot{v}$ (ley de las áreas)

$$V^2 = \frac{\mu P}{r^2}$$

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + C = \frac{\mu P}{r^2}$$

para $r = q$: $C = \dfrac{\mu P}{q^2} - \dfrac{2\mu}{q} = \dfrac{\mu q(e-1)}{q^2}$

en la cual $P = q(1+e)$

$$C = \frac{\mu(e-1)}{q}$$

<u>Orbita elíptica</u>: $q = a(1-e) \qquad e < 1 \qquad a > 0$

$$C = \frac{\mu\,(e - 1)}{a\,(1 - e)} = \frac{\mu}{a} < 0$$

Orbita parabólica: $e = 1 \qquad a \longrightarrow \infty$

$$C = 0$$

Orbita hiperbólica: $\qquad a < 0 \qquad\qquad e > 1$

$$q = - a\,(1 - e)$$

$$C = \frac{\mu(e - 1)}{\mp\, a(1 - e)} = + \frac{\mu}{a} > 0$$

La integral de las fuerzas vivas recibe el nombre también de integral de la energía pues ella expresa la conservación de la energía del sistema y C es la constante de la energía. La constante C es negativa para la elipse, cero para la parábola y positiva para la hipérbola.

De la integral de la energía:

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} = C$$

se deduce que el eje mayor de la cónica depende de la velocidad inicial y de la distancia r.

Si $V^2 < \frac{2\mu}{r}$ será $C < 0$ elipse

$V^2 \geq \frac{2\mu}{r}$ $\qquad C = 0$ parábola

$V^2 \quad \frac{2\mu}{r}$ $\qquad C > 0$ hipérbola

A la velocidad parabólica $V^2 = \frac{2\mu}{r}$ se la llama también velocidad de escape.

Posición de un astro en la órbita a partir de los elementos.

Orbita elíptica:

Si se conocen los elementos de la órbita:

$$\Omega \quad i \quad W$$
$$a \quad e \quad T$$

para situar al astro en la órbita deben calcularse $\underline{r}$ (radio vector) y $\underline{v}$ (anomalía verdadera).

Se resuelve primero la ecuación de Kepler:

$$u - e \operatorname{sen} u = n\,(t - T)$$

en la cual la incógnita es $\underline{u}$ ya que se conocen $\underline{T}$, $\underline{e}$ y $n = \mu a^{3/2}$

Calculado u se obtiene v por la fórmula:

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \qquad \operatorname{tg}\frac{u}{2}$$

y $\underline{r}$ de la expresión: $r = a\,(1 - e \cos u)$.

Orbita parabólica: (Fig. 3-II)

En este caso $p = 2\,q$ $\qquad e = 1$

$$r = \frac{2\,q}{1 + \cos v} = q \sec^2 \frac{v}{2}$$

por ley de las áreas:

$$r^2 \dot{v} = h = \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu 2\,q}$$

luego $\quad q^2 \sec^4 \frac{v}{2}\, d\,v = \sqrt{2\,q\mu}\quad d\,t$

$$\sec^2 \frac{v}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}\right) d\,v = \frac{\sqrt{2\mu}}{q^{3/2}}\,d\,t$$

integrando:

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}\,q^{3/2}}\quad (t - T)$$

donde T es la época de pasaje por el perihelio.

Resolviendo la ecuación se obtiene $\underline{v}$ y luego $\underline{r}$.

Orbita hiperbólica:

En lugar de deducirla directamente la obtendremos partiendo de la correspondiente a la elipse.

Considerando en la ecuación de la elipse.

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y}{b^2} = 1$$

al semieje $\underline{b}$ como imaginario $-\underline{bi}$ se obtiene la ecuación de la hipérbola:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

luego en las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} X = a \cos u \\ Y = b \operatorname{sen} u \end{cases}$

sen u debe ser imaginario para que $\underline{Y}$ se conserve real.

Introduciendo funciones hiperbólicas

$$H = i\,u$$

$$s\,h\,H = i \operatorname{sen} u$$

$$c\,h\,H = \cos u$$

Reemplazando en las correspondientes fórmulas del movimiento elíptico se obtiene:

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \ \operatorname{tgh} \frac{H}{2}$$

y en lugar de la ecuación de Kepler:

$$e \operatorname{sh} H - H = \frac{\sqrt{\mu}}{|a|^{3/2}} (t - T)$$

<u>Cálculo de efemérides</u>

Conocidos los elementos orbitales se calculan las coordenadas ecuatoriales absolutas α δ para épocas t_1, t_2, ... etc.

Sea (Fig. 4-II) una órbita elíptica descripta por un planeta P en torno al Sol, las coordenadas del planeta en el plano de la órbita, con respecto a un sistema de coordenadas con origen en el foco S y ejes $\overrightarrow{SA}$ y $\overrightarrow{SB}$, siendo A el perihelio son:

$$(1) \quad \begin{cases} X_0 = a(\cos u - e) \\ Y_0 = b \operatorname{sen} u \end{cases}$$

se resuelve primero la ecuación de Kepler y se determina <u>u</u>, pueden calcularse entonces (X_0, Y_0).

Si XYZ (Fig. 5-II) es un sistema de coordenadas eclípticas o sea XY coincide con la eclíptica y X es la dirección al punto vernal γ, las coordenadas eclípticas de P (X y Z) están dadas por:

$$(2) \quad \begin{cases} X = l_1 X_0 + l_2 Y_0 \\ Y = m_1 X_0 + m_2 Y_0 \\ Z = n_1 X_0 + n_0 Y_0 \end{cases}$$

Siendo $(l_1\ m_1\ n_1)$ y $(l_2\ m_2\ n_2)$ los cosenos directores de $\overrightarrow{SA}$ y $\overrightarrow{SB}$ con respecto a XYZ.

De los triángulos esféricos $\overset{\triangle}{AXN}$, $\overset{\triangle}{AYN}$ y $\overset{\triangle}{AZN}$ se obtiene:

$$(3) \quad \begin{cases} l_1 = \cos \widehat{AX} = \cos \Omega \cos W - \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} W \cos i \\ m_1 = \cos \widehat{AY} = \operatorname{sen} \Omega \cos W + \cos \Omega \operatorname{sen} W \cos i \\ n_1 = \cos \widehat{AZ} = \operatorname{sen} W \operatorname{sen} i \end{cases}$$

$$(4)\ \begin{cases} l_2 = \cos \widehat{BX} = -\cos\Omega \operatorname{sen} W - \operatorname{sen}\Omega \cos W \cos i \\ m_2 = \cos \widehat{BY} = -\operatorname{sen}\Omega \operatorname{sen} W + \cos\Omega \cos W \cos i \\ n_2 = \cos \widehat{BZ} = \cos W \operatorname{sen} i \end{cases}$$

Reemplazando (1) (3) y (4) en (2) se obtienen las coordenadas eclípticas heliocén tricas (XYZ).

Si $\mathcal{E}$ es la oblicuidad de la eclíptica (Fig. 6-II) se puede pasar por una rotación en torno al eje X en un ángulo $\mathcal{E}$, a las coqrdenadas ecuatoriales heliocéntricas de P_1 $(X_1\ Y_1\ Z_1)$:

$$X_1 = X$$
$$Y_1 = Y \cos\mathcal{E} - Z \operatorname{sen}\mathcal{E}$$
$$Z_1 = Y \operatorname{sen}\mathcal{E} + Z \cos\mathcal{E}$$

Combinando los resultados anteriores pueden obtenerse estas últimas coordenadas de la siguiente manera:

$$X_1 = a\, P_x \cos u + b\, Q_x \operatorname{sen} u - a\, e\, P_x$$
$$Y_1 = a\, P_y \cos u + b\, Q_y \operatorname{sen} u - a\, e\, P_y$$
$$Z_1 = a\, P_2 \cos u + b\, Q_z \operatorname{sen} u - a\, e\, P_2$$

en las cuales:

$$P_x = l_1 \qquad\qquad Q_x = l_2$$
$$P_y = m_1 \cos\mathcal{E} - n_1 \operatorname{sen}\mathcal{E} \qquad\qquad Q_y = m_2 \cos\mathcal{E} - n_2 \operatorname{sen}\mathcal{E}$$
$$P_z = m_1 \operatorname{sen}\mathcal{E} + n_1 \cos\mathcal{E} \qquad\qquad Q_z = m_2 \operatorname{sen}\mathcal{E} + n_2 \cos\mathcal{E}$$

El pasaje a coordenadas geocéntricas se efectúa sumando a las coordenadas heliocéntricas las coordenadas ecuatoriales geocéntricas del Sol: XYZ, que figuran tabuladas día por día en las efemérides (Traslación del origen a la Tierra):

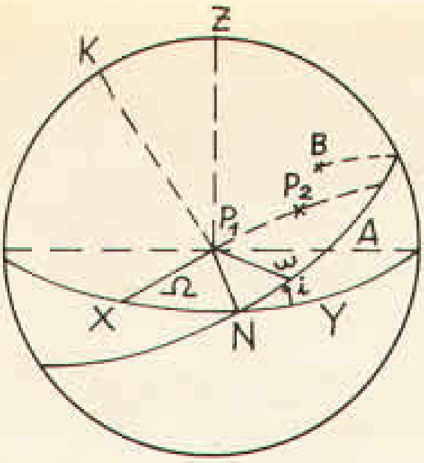
$$\xi_1 = x_1 + X$$
$$\eta_1 = y_1 + Y$$
$$\rho_1 = z_1 + Z$$

de las fórmulas

$$\xi = \rho \cos\delta \cos\alpha$$
$$\eta = \rho \cos \quad \operatorname{sen}$$
$$\rho = \rho \operatorname{sen} \delta$$

se obtiene

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\eta}{\xi} \qquad\qquad \operatorname{tg}\delta = \frac{\rho}{\xi\ \ \eta}$$



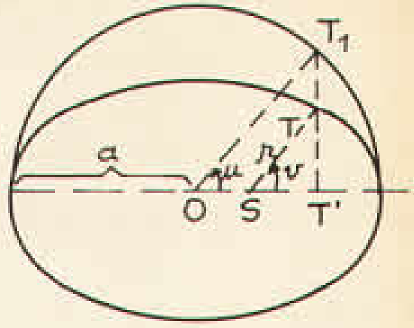
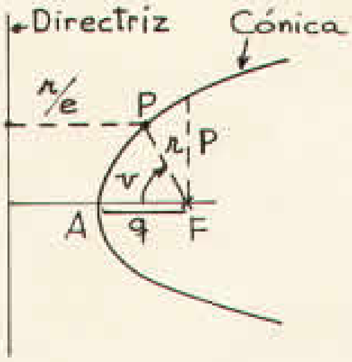


FIG. 2 - II

FIG. 1 - II



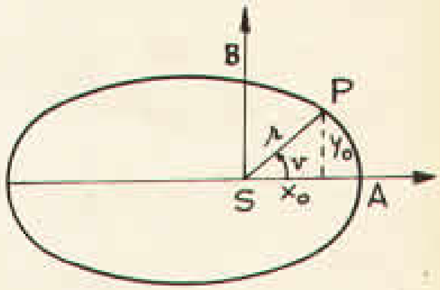


FIG. 3 - II

FIG. 4 - II

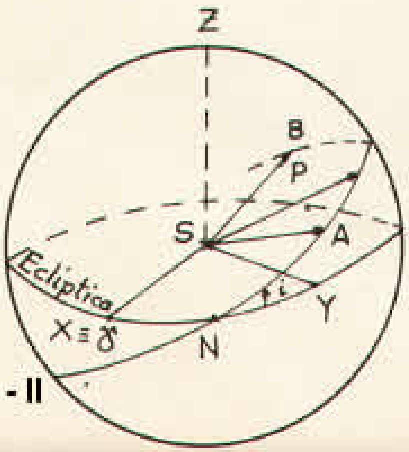


Fig. 5 - II

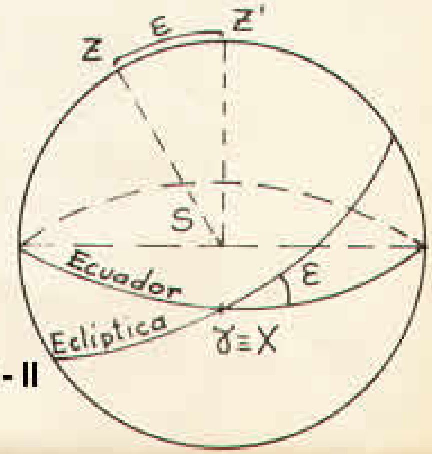


Fig. 6 - II

Dr. Raúl Roberto Podestá
Coordinador Sección Cohetería Civil
Coordinador Sección Planetas
LIADA - Liga Iberoamericana de Astronomía
Director del Observatorio Astronómico "NOVA PERSEI"
Miembro y Observador de la AAVSO
(AAVSO – The American Association of Variable Star Observers)
http://ar.geocities.com/observatorionovapersei/
rpodesta@clorinda-fsa.com.ar
rrpodesta@hotmail.com