Capítulo III: Problema restringido de Tres cuerpos

Si Tres cuerpos, aislados en el espacio, se atraen de acuerdo a la ley de Newton, el problema que se plantea es de orden 18. En efecto (Ver Apéndice I) un problema / general de n cuerpos es de orden $6n$ y en este caso $n = 3$. Además existen, en el problema general, 10 integrales de movimiento que reducen el orden del sistema. Queda por lo tanto un problema de octavo orden no resoluble matemáticamente en forma general.

La primera solución particular del problema de Tres cuerpos fue la memoria de Lagrange "Essai sur le probleme des Trois corps" presentada a la Academia de Paris en 1772.

Lagrange reduce el problema a 7° orden y encuentra que pueden integrarse las / ecuaciones cuando la razón de las distancias mutuas de los cuerpos es constante.

Jacobi en forma independiente también reduce el problema a 7° orden introduciendo un sistema de coordenadas rotante (sinódico) de manera que las masas finitas resulten fijas con respecto a dicho sistema.

Hill encuentra soluciones periódicas en su desarrollo de la Teoría de la Luna.

Poincaré en una memoria premiada por el rey Oscar de Suecia demuestra la existencia de soluciones periódicas para ciertos conjuntos de condiciones iniciales, marcando con sus métodos una nueva etapa en el desarrollo de la Mecánica Celeste.

Si en un problema de $\underline{n}$ cuerpos una de las masas se desprecia el problema recibe el nombre de restringido. Por lo tanto se llamará problema restringido de Tres cuerpos al caso en que un cuerpo de masa despreciable es atraído por dos cuerpos de masas conocidas. Varias son las aplicaciones del problema restringido de Tres cuerpos.

Por ejemplo en el caso de Sol - Tierra - Luna cuyas masas son: $m_{\odot} = 300.000$ $m_{\oplus} = 1$ $m_{☽} = 0.01$. La masa de la Luna puede despreciarse en una primera aproximación frente a la de la Tierra y la del Sol.

Los problemas de Mecánica Espacial siempre pertenecen a la categoría de problemas restringidos puesto que el vehículo espacial no afecta las órbitas de los cuerpos celestes. Tierra - luna - nave espacial constituyen otro ejemplo del problema/ restringido de Tres cuerpos.

<u>Ecuaciones de movimiento</u>: Consideraremos el caso de un cuerpo infinitesimal (masa/ despreciable) que es atraído por dos cuerpos finitos que se mueven en círculos alrededor de su centro de masa.

La unidad de masa se elige de modo tal que la suma de las masas de los dos cuerpos finitos sea igual a uno, es decir si una masa es μ la otra es $1-\mu$ siendo $\mu \leq \frac{1}{2}$. La unidad de distancia es la distancia entre los dos cuerpos finitos y la unidad de tiempo tal que $G = 1$.

El origen de coordenadas, el centro de masa y la dirección de los ejes tal que $\xi\eta$ es el plano de movimiento el sistema $\xi\eta$ es fijo (sideral)

Las coordenadas serán:

De: P_1 (masa $1-\mu$) : $\xi_1 \; \eta_1 \; 0$

P_2 (masa μ) : $\xi_2 \; \eta_2 \; 0$

P_3 (masa 0) : $\xi \; \eta \; \zeta$

$$r_1 = \sqrt{(\xi-\xi_1)^2 + (\eta-\eta_1)^2 + \zeta^2} \qquad r_2 = \sqrt{(\xi-\xi_2)^2 + (\eta-\eta_2)^2 + \zeta^2}$$

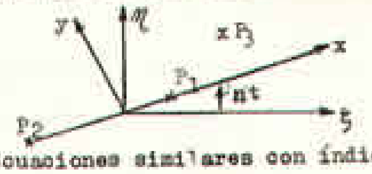
Las ecuaciones diferenciales de movimiento para P_3 :

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = -(1-\mu)\dfrac{\xi-\xi_1}{r_1^3} - \dfrac{\xi-\xi_2}{r_2^3} \\[2ex] \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = -(1-\mu)\dfrac{\eta-\eta_1}{r_1^3} - \dfrac{\eta-\eta_2}{r_2^3} \\[2ex] \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = -(1-\mu)\dfrac{\zeta}{r_1^3} - \mu\dfrac{\zeta}{r_2^3} \end{cases}$$

Como consecuencia de la elección de unidades el movimiento angular de los cuerpos finitos es:

$$n = \frac{\sqrt{G}\sqrt{(1-\mu)+\mu}}{a^{3/2}} = 1$$

Se elige luego un nuevo sistema de ejes xy (sinódico) rotando en el plano $\xi\eta$ en la dirección en que se mueven los cuerpos finitos con velocidad angular uniforme unidad. La relación entre los dos sistemas es:



$$(2) \quad \begin{cases} \xi = x\cos t - y\,\mathrm{sen}\,t \\ \eta = x\,\mathrm{sen}\,t + y\cos t \\ \zeta = z \end{cases}$$

Ecuaciones similares con índice 1 y 2.

Calculando las derivadas segundas de (2) y sustituyendo en (1)

$$\begin{cases} (\ddot{x} - 2\dot{y} - x)\cos t - (\ddot{y} + 2\dot{x} - y)\,\mathrm{sen}\,t = -\left[(1-\mu)\dfrac{x-x_1}{r_1^3} + \mu\dfrac{x-x_2}{r_2^3}\right]\cos t + \\[2ex] \qquad\qquad + \left[(1-\mu)\dfrac{y-y_1}{r_1^3} + \mu\dfrac{y-y_2}{r_2^3}\right]\mathrm{sen}\,t \\[2ex] (\ddot{x} - 2\dot{y} - x)\,\mathrm{sen}\,t + (\ddot{y} + 2\dot{x} - y)\cos t = -\left[(1-\mu)\dfrac{x-x_1}{r_1^3} + \mu\dfrac{x-x_2}{r_2^3}\right]\mathrm{sen}\,t \\[2ex] \qquad\qquad - \left[(1-\mu)\dfrac{y-y_1}{r_1^3} + \mu\dfrac{y-y_2}{r_2^3}\right]\cos t \\[2ex] \ddot{z} = -\left[(1-\mu)\dfrac{z}{r_1^3} - \mu\dfrac{z}{r_2^3}\right] \end{cases}$$

Si se toma el origen de tiempo de tal manera que el eje x pase a través de los cuerpos finitos, será durante el movimiento $y_1 = 0$ $y_2 = 0$.

Si además a las últimas ecuaciones se las multiplica primero respectivamente por $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$ y se las suma y luego por $-\operatorname{sen} t$ y $\cos t$ y se suman resultan las ecuaciones diferenciales del movimiento:

$$(3) \quad \begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = x - (1-\mu)\dfrac{x-x_1}{r_1^3} - \mu\dfrac{x-x_2}{r_2^3} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = y - (1-\mu)\dfrac{y}{r_1^3} - \mu\dfrac{y}{r_2^3} \\ \ddot{z} = -(1-\mu)\dfrac{z}{r_1^3} - \mu\dfrac{z}{r_2^3} \end{cases}$$

El problema es de sexto orden; si P_3 se mueve en el mismo plano que P_1 y P_2 es $z = 0$ y el problema se reduce al cuarto orden.

Integral de Jacobi:

Definiendo $$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$$

Las ecuaciones (3) pueden escribirse:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = \dfrac{\partial U}{\partial y} \\ \ddot{z} = \dfrac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$

Multiplicando las tres ecuaciones respectivamente por $2\dot{x}$, $2\dot{y}$ y $2\dot{z}$ y sumandolas la ecuación que resulta puede ser integrada y se obtiene

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = V^2 = 2U - C \qquad (4)$$

Esta integral es la de Jacobi y la constante C recibe el nombre de constante de Jacobi.

La integral es una relación entre el cuadrado de la velocidad y las coordenadas del cuerpo P_3 referidas a un sistema rotante.

Si en base a las condiciones iniciales se determina el valor de C la integral permite conocer para cualquier instante la velocidad de P_3 en todos los puntos / del espacio rotante. Inversamente para una determinada velocidad permite calcular el lugar de los puntos des espacio relativo donde puede encontrarse P_3.

Superficies de velocidad relativa cero:

Si en la (4) se hace $V = 0$ dicha integral define las superficies en las cuales la velocidad del cuerpo será 0. Con respecto a dichas superficies la velocidad será real en un lado: $V^2 > 0$ e imaginaria en el otro: $V^2 < 0$ pues al atravesar la superficie $V = 0$ la función cambia de signo. Es decir que es posible que el cuerpo se mueva en un lado, e imposible en el otro.

La ecuación de las superficies de velocidad cero es:

$$x^2 + y^2 \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} = C \qquad (5)$$

con $r_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2 + z^2}$ $\qquad r_2 = \sqrt{(x-x_2)^2 + y^2 + z^2}$

Como en (5) z e y figuran al cuadrado las superficies son simétricas con respecto a los planos $(x\,y)$ y $(x\,z)$ y si $\mu = \frac{1}{2}$ también con respecto al $(y\,z)$

Las superficies están contenidas en un cilindro cuyo eje es z y radio $\sqrt{C}$.

La intersección de las superficies con los planos coordenados nos da una idea de la forma de las mismas. Haciendo, por ejemplo, $z = 0$ obtenemos las ecuaciones de las curvas de intersección con el plano $(x\,y)$: (Figura 1-III)

$$x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}} + \frac{2\mu}{\sqrt{(x-x_2)^2 + y^2}} = C \qquad (6)$$

Para grandes valores de x e y el tercero y cuarto término de (6) son pequeños y puede escribirse:

$$x^2 + y^2 = C - \varepsilon$$

Las curvas son aproximadamente circulares.

Si en cambio en (6) son pequeños los dos primeros términos la ecuación es de la forma:

$$\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} = \frac{C}{2} - \varepsilon$$

Para grandes valores de C las curvas son cerradas alrededor de cada uno de los cuerpos P_1 y P_2. Para valores de C menores una curva encierra los dos cuerpos.

En la figura 1-III C_1, $C_2, \ldots, C_5$ están dados en orden decreciente de C.

Si se hace $y = 0$ en (5) se obtienen las curvas de intersección de las superficies con el plano $(x\,z)$: (Fig.2-III)

$$x^2 \frac{2(1-\mu)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + z^2}} + \frac{2\mu}{\sqrt{(x-x_2)^2 + z^2}} = C$$

Para grandes valores de x y z podemos escribir:

$$x^2 = C - \varepsilon$$

ecuación de pares de rectas simétricas paralelas al eje z.

Por último la intersección con el plano $(y\,z)$ para $x = 0$ será: (Fig.3-III)

$$y^2 + \frac{2(1-\mu)}{\sqrt{x_1^2 + y^2 + z^2}} + \frac{2\mu}{\sqrt{x_2^2 + y^2 + z^2}} = 0$$

<u>Soluciones particulares del problema</u>

Los puntos dobles de las superficies, cuando C decrece, pertenecen todos al plano $(x\,y)$.

Hay tres puntos dobles sobre el eje x que aparecen cuando se tocan las curvas / que rodean los cuerpos finitos o dichas curvas con las exteriores que rodean a ambas.

Los otros dos puntos, solución equilátera del problema, corresponden a la desaparición de las superficies del plano $(x\,y)$.

Estos puntos dobles están conectados con propiedades dinámicas del sistema.

Si la ecuación de las curvas es:

$$F(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - C = 0$$

Como $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ los puntos dobles se obtienen imponiendo la condición

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Resulta el siguiente sistema:

$$(7) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x} = x - (1-\mu)\frac{(x-x1)}{r_1^3} - \mu\frac{(x-x2)}{r_2^3} = 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y} = y - (1-\mu)\frac{y}{r_1^3} - \mu\frac{y}{r_2^3} = 0 \end{cases}$$

Estas ecuaciones son iguales a los segundos miembros de las (3) y como $\frac{\partial F}{\partial x}$ $\frac{\partial F}{\partial y}$ son proporcionales a los cosenos directores de la normal a las curvas en los puntos ordinarios y además en las superficies de velocidad cero $\frac{dx}{dt} = 0$ $\frac{dy}{dt} = 0$ resulta de (3) que las direcciones de fuerza efectiva son perpendiculares a las superficies de velocidad relativa 0. Esto implica que si P_3 está sobre una de tales superficies su movimiento comienza en dirección de la normal y como en los puntos dobles el sentido de la normal es ambiguo el cuerpo P_3 en esos puntos deberá permanecer en reposo si no actúan sobre él, fuerzas exteriores al sistema.

La segunda de las ecuaciones (7) se satisface para $y = 0$ luego los tres puntos / dobles pertenecientes al eje x dan las soluciones en que los cuerpos están alineados, las ecuaciones son:

$$(8) \quad \begin{cases} x - (1-\mu)\dfrac{(x-x_1)}{\left[(x-x_1)^2\right]^{3/2}} - \mu\dfrac{(x-x_2)}{\left[(x-x_2)^2\right]^{3/2}} = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

El primer miembro de la primera ecuación (8) cambia de signo tres veces al variar $\underline{x}$: (Figura 4.III).

a) Entre $\underline{+\infty}$ y $\underline{x_2}$: punto doble L_1

b) Entre $\underline{x_2}$ y $\underline{x_1}$: punto doble L_2

c) Entre $\underline{x_1}$ y $\underline{-\infty}$: punto doble L_3

Si ρ es la distancia del punto doble L_1 a P_2:

$$x - x_2 = \rho$$
$$x - x_1 = 1 + \rho$$
$$x = 1 - \mu + \rho$$

La primera ecuación (8) resulta:

$$\rho^5 + (3-\mu)\rho^4 + (2-2\mu)\rho^3 - \mu\rho^2 - 2\mu\rho - \mu = 0$$

Tiene una sola raíz positiva cuyo valor depende de μ. Si es pequeño esta raíz puede expresarse como serie de potencias de $\mu^{1/3}$ obteniéndose finalmente

$$\rho = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} - \frac{1}{9}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{3/3} + \ldots..$$

Análogamente para L_2 se hace $x - x_2 = -\rho$ y se obtiene como solución de la ecuación:

$$\rho = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} - \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} - \frac{1}{9}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{3/3} + \ldots.$$

Finalmente para L_3 : $x - x_2 = -2 + \rho$ y la solución esta dada en potencias de μ :

$$\rho = \frac{7}{12}\mu + \frac{23 \times 7^2}{12^4}\mu^3 + \ldots..$$

Para encontrar los puntos dobles L_4 y L_5 que no están situados en el eje x, como $y \neq 0$, la segunda ecuación de (7) se puede dividir por y :

$$1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} = 0$$

Multiplicanco esta ecuación primero por $(x - x_2)$ y luego por $(x - x_1)$ y restando los resultados separadamente de la primera de las (7) resulta:

$$\begin{cases} x_2 - (1-\mu)\dfrac{(x_2-x_1)}{r_1^3} = 0 \\ x_1 - \mu\dfrac{(x_1-x_2)}{r_2^3} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Pero como $x_2 = 1 - \mu$ $x_1 = -\mu$ $x_2 - x_1 = 1$ estas ecuaciones se reducen a:

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{1}{r_1^3} = 0 \\ -1 + \dfrac{1}{r_2^3} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Las únicas soluciones reales de este último sistema son: $r_1 = 1$ $r_2 = 1$ o sea que L_4 y L_5 forman triángulos equiláteros con los cuerpos finitos P_1 y P_2 cualquiera sea su masa relativa. Esto ocurre en los lugares donde las superficie desaparecen del plano $(x\,y)$

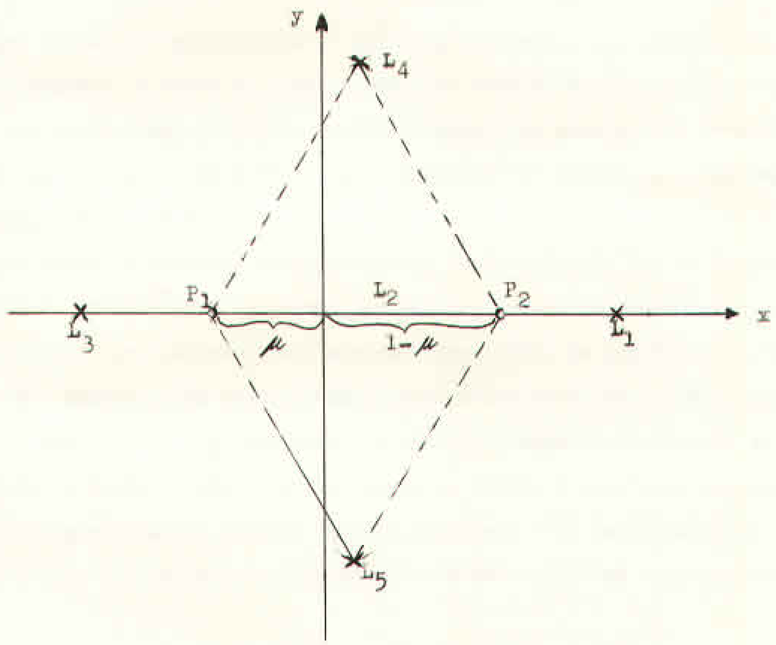


Figura 4-III

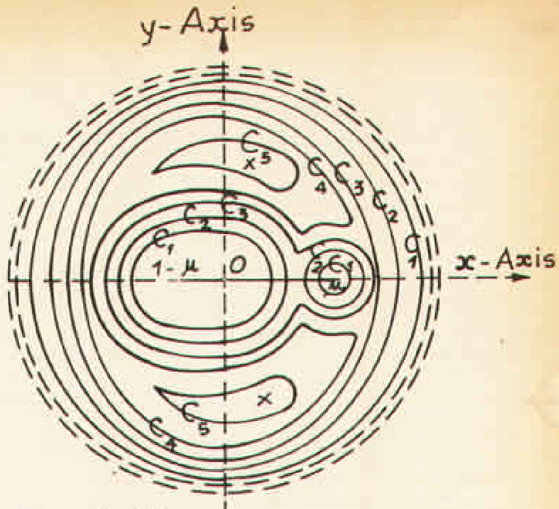


FIG. 1 - III

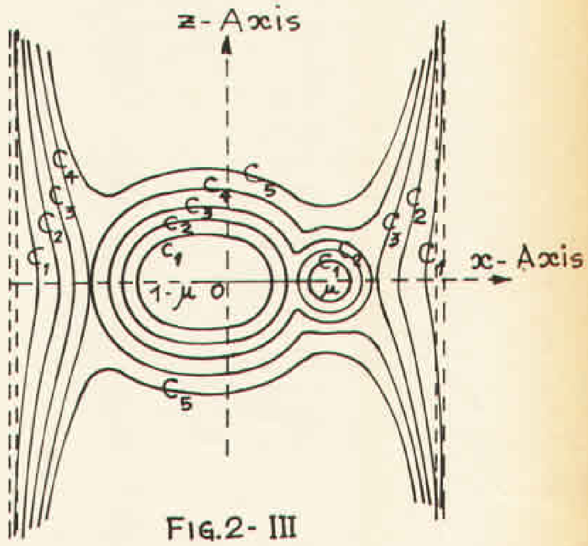


FIG. 2- III

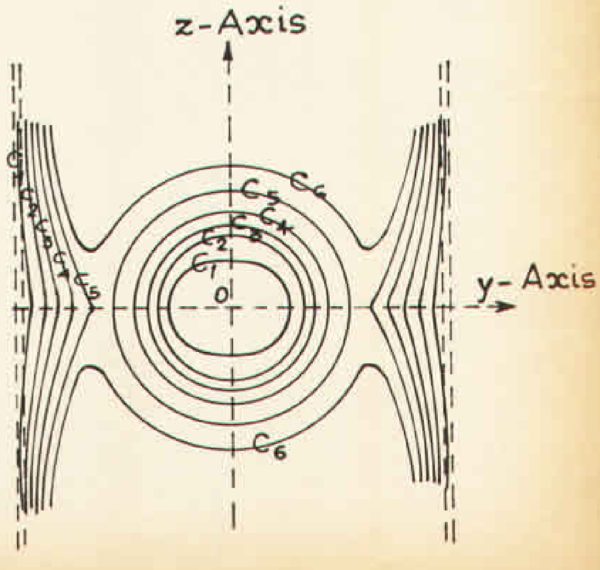


FIG. 3 - III

Dr. Raúl Roberto Podestá
Coordinador Sección Cohetería Civil
Coordinador Sección Planetas
LIADA - Liga Iberoamericana de Astronomía
Director del Observatorio Astronómico "NOVA PERSEI"
Miembro y Observador de la AAVSO
(AAVSO – The American Association of Variable Star Observers)
http://ar.geocities.com/observatorionovapersei/
rpodesta@clorinda-fsa.com.ar
rrpodesta@hotmail.com