1. Variación de los elementos: Vimos en el Capítulo II que en el caso ideal de que dos cuerpos estén aislados en el espacio uno de ellos describe una cónica con respecto al otro. Si existen otras fuerzas, además de la atracción mutua, esas fuerzas causarán perturbaciones al movimiento. Las fuerzas perturbadoras pueden originarse, por ejemplo, por la presencia de otros cuerpos, por la acción de un medio resistente o también por la no esfericidad de los dos cuerpos considerados. Estas fuerzas producirán variaciones en los elementos orbitales, pues si por ejemplo, un cuerpo P se mueve en una cónica alrededor de otro cuerpo S y en el instante t_o su posición es P_o y su velocidad V_o, idealmente debería moverse en una sola cónica / C_o, pero si en un instante t_1 actúa sobre él una fuerza perturbadora F_1 adquirirá una velocidad V_1 distinta a la que tendría en la cónica C_o y comenzará a moverse en una cónica C_1 hasta que por la acción de una nueva fuerza F_2 comience a moverse en otra cónica C_2 (Figura 1-IV). Si los intervalos t_1-t_o, t_2-t_1, t_n-t_{n-1} tienden a cero, la fuerza perturbadora en el límite hará cambiar la cónica continuamente.

Llamaremos órbita osculadora a una cónica tangente a la orbita real en un cierto instante. Es la cónica que decribiría el cuerpo P si a partir de dicho instante dejarán de actuar las perturbaciones.

Método geométrico aproximado: Se descompone la fuerza perturbadora en tres componentes rectangulares:

La componente ortogonal $\vec{W}$ es perpendicular al plano de la órbita osculadora y se considera positiva cuando es paralela y de igual dirección que el eje z.

La componente tangencial $\vec{T}$ en dirección de la tangente, positiva cuando actúa en la dirección del movimiento.

La componente normal $\vec{N}$ perpendicular a la tangente en el plano de la órbita, positiva cuando está dirigida hacia la concavidad de la órbita.

Efectos de las tres componentes:

a) La componente ortogonal $\vec{W}$ no afecta el tamaño y la forma de la órbita, afecta solamente a los elementos Ω e i e indirectamente a w que se mide a partir / del nodo.

Si (Figura 2-IV) Ω_o i_o corresponden al instante t_o y en el instante t_1 actúa F_1 los nuevos valores de la longitud del modo e inclinación seran Ω_1 i_1

Si en el instante t_2 la posición del cuerpo es P_2 y actúa F_2 los elementos / considerados serán Ω_2 i_2.

Un cambio Δr en la longitud del modo produce un cambio en el argumento del perigeo: $\Delta w = \Delta r \cos i$.

b) La componente tangencial T si es positiva aumenta la velocidad V.

De la ecuación de la energía $$V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \qquad (1)$$

deducimos que si aumenta V no cambia $\underline{r}$ pero aumenta $\underline{a}$ semieje mayor.

Derivando la (1) con respecto al tiempo:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{2a^2 V}{\mu}\,\frac{\partial V}{\partial t}$$

luego el efecto es máximo en el perigeo donde V es máximo.

De acuerdo con la relación $r_1 + r_2 = 2a$ (Figura 3-IV) si r_1 no cambia deberá aumentar r_2 si $\underline{a}$ aumenta, para lo cual el foco F_2 se moverá a la posición / F'_2 y la línea de los ápsides $F_1 F_2$ rotará en sentido directo. Esto ocurre en la primera mitad de la revolución, en la segunda mitad el efecto es opuesto.

Cuando el cuerpo se encuentra en el perigeo la línea de los ápsides no gira pero la distancia entre los focos $F_1 F_2$ aumenta en la misma cantidad Δa que el eje mayor $2a$.

Como $e = \frac{\overline{F_1 F_2}}{2a}$ después de la perturbación la nueva excentricidad será

$$e' = \frac{\overline{F_1F_2} + \Delta a}{2a + \Delta a} \quad \frac{F_1F_2}{2a} \quad \frac{1 + \frac{\Delta a}{F_1F_2}}{1 + \frac{\Delta a}{2a}}$$

$$e' > e$$

En el apogeo $2a$ aumenta pero $\overline{F_1F_2}$ decrece y por lo tanto decrece la excentricidad e.

c) La componente normal $\vec{N}$ no altera al eje mayor $\underline{2a}$, si $\vec{N}$ es positiva la tangente a la órbita es corrida hacia el interior y como $\underline{r_1}$ y $\underline{r_2}$ forman / ángulos iguales con la tangente se deduce que la línea de los ápsides rota en sentido directo o inverso de acuerdo a la posición del cuerpo en la órbita.

La excentricidad también resulta afectada por $\vec{N}$.

Nota: Este método aproximado fue expuesto por Newton en su "Principios de Filosofía Natural". Hemos seguido aquí el Texto de Moulton (Capítulo IX) en el cual se encuentra el siguiente cuadro:

Efecto de las Tres componentes de una fuerza perturbadora en el movimiento elíptico

Componente	$+\vec{W}$	$+\vec{T}$	$+\vec{N}$
Nodos	Avance en el 1° y 2° cuadrante Retroceso en el 3° y 4°	0	0
Inclinación	Aumento en el 1° y 4° cuadrantes. Disminución en el 2° y 3°.	0	0
Eje mayor	0	Siempre aumenta	0
Línea de los aspides	Efecto indirecto en razon del cambio en nodo	Primera mitad de la resolución $\widehat{PM_1A}$ sentido directo. Segunda mitad retrógrado $\widehat{AM_2P}$.	En $\widehat{N_2PN_1}$ directo En $\widehat{N_1AN_2}$ retrógrado
Excentricidad	0	En el arco $\widehat{M_2PM_1}$ aumenta. En el arco $\widehat{M_1AM_2}$ decrece	En $\widehat{PM_1A}$ aumenta En $\widehat{AM_2P}$ decrece

Metodo de variación de las constantes

Del estudio del problema de dos cuerpos se sabe que conocidas en un instante dado las coordenadas y las componentes de la velocidad se pueden obtener los seis elementos orbitales. En el problema de dos cuerpos los elementos no varían con el tiempo. Si se considera el movimiento de un planeta alrededor del Sol el problema de dos cuerpos da una órbita elíptica que es una muy buena aproximación del movimiento real ya que las aceleraciones producidas por los otros planetas son mucho menores / que la causada por el Sol.

Como en el movimiento deben considerarse las influencias de todos los cuerpos perturbadores, las coordenadas y componentes de la velocidad en un instante pueden utilizarse para obtener un conjunto de seis elementos orbitales. Esos son los elementos de la elipse que el cuerpo seguiría si desde ese instante particular las aceleraciones causadas por todos los cuerpos perturbadores dejaran de actuar. En el movimiento real en cambio los elementos orbitales deben variar con el tiempo. En lugar de obtener las coordenadas perturbadoras por solución numérica de las ecuaciones diferenciales, método que en Mecánica Celeste se llama de Perturbaciones Especiales, se pueden obtener primero los elementos orbitales como funciones del tiempo y de ahí, las coordenadas por las fórmulas del movimiento elíptico. Este último método de

Variación de las constantes se aplica a un sistema de ecuaciones diferenciales de sexto orden.

Si las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dfrac{\mu x}{r^3} = X \\ \ddot{y} + \dfrac{\mu y}{r^3} = Y \\ \ddot{z} + \dfrac{\mu z}{r^3} = Z \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

en los primeros miembros de estas ecuaciones los segundos términos son, con el signo cambiado, las componentes de la aceleración relativa producida por la masa del primario colocada en el origen de coordenadas. Los segundos miembros son las aceleraciones perturbadoras producidas por todas las otras fuerzas que afectan el movimiento.

Se puede suponer que $X\ Y\ Z$ son las derivadas de una función perturbadora R:

$$X = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad Y = \frac{\partial R}{\partial y} \qquad Z = \frac{\partial R}{\partial z}$$

Si los segundos miembros de (I) son iguales a cero la solución del sistema es:

$$\begin{array}{ll} x = f_1(c_1\ c_2\ \ldots\ldots\ c_6\ t) & \dot{x} = g_1(c_1\ c_2\ \ldots\ldots\ c_6\ t) \\ y = f_2(c_1\ c_2\ \ldots\ldots\ c_6\ t) & \dot{y} = g_2(c_1\ c_2\ \ldots\ldots\ c_6\ t) \\ z = f_3(c_1\ c_2\ \ldots\ldots\ c_6\ t) & \dot{z} = g_3(c_1\ c_2\ \ldots\ldots\ c_6\ t) \end{array} \qquad \text{(II)}$$

Como en el movimiento elíptico los elementos son constantes

$$g_k = \frac{\partial f_k}{\partial t} \qquad k = 1,\ 2,\ 3$$

En el método de variación de las constantes arbitrarias el problema es satisfacer las ecuaciones (I), con segundo miembro distinto de cero, por las soluciones (II) en cuyo caso $c_1\ c_2\ \ldots\ldots\ c_6$ no pueden ser constantes, sino funciones del tiempo.

Si las ecuaciones de partida son canónicas y el sistema de constantes es también / canónico las ecuaciones del movimiento no perturbado son:

$$\text{(a)} \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial y_i} \\ \dfrac{dy_i}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial x_i} \end{cases} \qquad i = 1,\ 2, \ldots\ldots\ n$$

La solución general de estas ecuaciones canónicas, en función de $2n$ constantes / arbitrarias será:

$$\text{(b)} \begin{cases} x_i = x_i(t,\ c_1,\ c_2 \ldots,\ c_{2n}) \\ y_i = y_i(t,\ c_1,\ c_2 \ldots,\ c_{2n}) \end{cases}$$

En el problema de dos cuerpos: $n = 6$

$$x_1 = x \qquad y_1 = \dot{x}$$
$$x_2 = y \qquad y_2 = \dot{y}$$
$$x_3 = z \qquad y_3 = \dot{z}$$

$$F = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} - \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Si actúa una perturbación R las ecuaciones se convierten en:

$$(c) \begin{cases} \dfrac{dxi}{dt} = \dfrac{\partial(F-R)}{\partial y} \\ \dfrac{dy_i}{dt} = \dfrac{\partial(F-R)}{\partial x} \end{cases}$$

Aplicando el método de variación de las constantes consideramos a las $2n$ cantidades c en las expresiones (b) no más como constantes sino como incógnitas y tratamos de determinar esas $2n$ funciones de modo que las (b) satisfagan a las (c)
En el caso del movimiento elíptico las seis constantes son los seis elementos orbitales a e i Ω $\bar{w}$ τ siendo $\bar{w} = \Omega + w$ y τ la época de pasaje por el perihelio.

Puede demostrarse que las ecuaciones que determinan las seis funciones C_i en función del tiempo son:

$$\frac{dC_4}{dt} = \frac{\partial R}{\partial C_1} \qquad \frac{dC_1}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial C_4}$$

$$\frac{dC_5}{dt} = \frac{\partial R}{\partial C_2} \qquad \frac{dC_2}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial C_5}$$

$$\frac{dC_6}{dt} = \frac{\partial R}{\partial C_3} \qquad \frac{dC_3}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial C_6}$$

Por este método de variación de las constantes Lagrange encuentra las seis ecuaciones a partir de las cuales se ha construído la teoría del movimiento de los planetas con respecto al Sol.

<u>Ecuaciones de la Teoría de perturbaciones o ecuaciones de Lagrange de la Mecánica Celeste:</u>

$$\text{I} \qquad \frac{da}{dt} = -\frac{2}{n^2 a}\,\frac{\partial R}{\partial t}$$

$$\text{II} \qquad \frac{de}{dt} = -\frac{1-e^2}{n\,a^2 e}\,\frac{\partial R}{\partial w} - \frac{1-e^2}{n^2 a^2 e}\,\frac{\partial R}{\partial t}$$

$$\text{III} \qquad \frac{di}{dt} = -\frac{1}{n\,a^2\sqrt{1-e^2}\ \mathrm{sen}\, i}\,\frac{\partial R}{\partial} - \frac{\mathrm{tg}\,\frac{i}{2}}{n\,a^2\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\partial R}{\partial \bar{w}}$$

$$\text{IV} \qquad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{n\,a^2\sqrt{1-e^2}\ \mathrm{sen}\, i}\,\frac{\partial R}{\partial i}$$

$$\text{V} \quad \frac{d\bar{w}}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{n\,a^2\,e}\,\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\partial R}{\partial i}$$

$$\text{VI} \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{2}{n^2 a}\,\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{1-e^2}{n^2\,a^2\,e}\,\frac{\partial R}{\partial e}$$

Desarrollo de la función perturbadora

En el caso de un cuerpo P que se mueve alrededor de un cuerpo central y es perturbado por otro cuerpo P', la función perturbadora puede escribirse en la forma:

$$R = G\,m'\left(\frac{1}{\triangle} - \frac{x\,x' + y\,y' + z\,z'}{r'^3}\right) \qquad (1)$$

donde $\triangle$ es la distancia de P a P' y r' la distancia de P' al cuerpo central.

Si se reemplazan las coordenadas rectangulares heliocéntricas por las variables a, e, $\varphi(=i)$, $\theta(=r)$, $\bar{w}$ y ε (en lugar de) siendo $\varepsilon = \bar{w} - n$, siguiendo el método de variación de las constantes, las relaciones que ligan los dos sistemas son:

$$\begin{cases} n = \sqrt{\dfrac{G(1+m)}{a^3}} & u - e \operatorname{sen} u = n\,t + \varepsilon - \bar{w} \\ r = a(1-e\cos u) & \operatorname{tg}\dfrac{\nu - \bar{w}}{2} = \sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\;\operatorname{tg}\dfrac{u}{2} \\ \nu = \theta + w + v & \\ x = r\left[\cos\theta\cos(\nu-\theta) - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(\nu-0)\cos\varphi\right] & \\ y = r\left[\operatorname{sen}\theta\cos(\nu-\theta) + \cos\theta\operatorname{sen}(\nu-0)\cos\varphi\right] & \\ z = r\operatorname{sen}(\nu-\theta)\operatorname{sen}\varphi & \end{cases}$$

Reemplazando en (1) estos valores R se convierte en una función conocida del tiempo t y de las nuevas variables y puede demostrarse que la función perturbadora ademite como desarrollo una serie de la forma:

$$R = \sum C\cos D \qquad (2)$$

en la cual $D = i(n\,t+\varepsilon) + i'(n't+\varepsilon') + k\,\bar{w} + k'\bar{w}' + j\,\theta + j'\theta'$ (3)

siendo $i\ i'\ j\ j'\ k\ k'$ números enteros cualesquiera o cero.

Los coeficientes C son funciones de $a\ a'\ e\ e'\ \varphi\ \varphi'$ que disminuyen bastante rápidamente cuando aumentan los valores absolutos de los números enteros $i\,i'\,j\,j'\,k\,k'$.

En (2) deben figurar tambien términos análogos a los recién considerados pero en los cuales $n'\ \varepsilon'$ .. se reemplacen por $n''\ \varepsilon''$ ... etc si actua otro cuerpo perturbador P'' y por $n'''\ \varepsilon'''$ si actúan perturbaciones de un Tercer cuerpo P''' y así siguiendo.

En el caso de un problema de Tres cuerpos deben considerarse las perturbaciones de P por P' y las de P' debidas a P.

Si los elementos variables se desarrollan en la forma

$$(4) \quad \begin{cases} a = a_0 + \delta_1 a_0 + \delta_2 a_0 + \dots\dots \\ \theta = \theta_0 + \delta_1 \theta_0 + \delta_2 \theta_0 + \dots\dots \\ \text{-------------------} \\ a' = a'_0 + \delta_1 a'_0 + \delta_2 a'_0 + \dots\dots \\ \theta' = \theta'_0 + \delta_1 \theta'_0 + \delta_2 \theta'_0 + \dots\dots \\ \text{-------------------} \end{cases}$$

los δ_i son funciones del tiempo t y de las masas; con relación a las masas los δ_i serán de orden i. los δ_i que se refieren al planeta P se anulan con m' y contienen m' como factor. los que se refieren a P' tendrán como factor m.

$\delta_1 a_0$ será la perturbación de primer orden de a_0

$\delta_2 a_0$ será la perturbación de segundo orden de a_0.

Para obtener las distintas perturbaciones se integran las ecuaciones de Lagrange en las cuales intervienen las derivadas de R con respecto a los elementos.

Perturbaciones de primer orden: Si se sustituyen las (4) en las ecuaciones de Lagrange y se consideran solamente las cantidades de primer orden se deberá sustituir en los segundos miembros a los elementos $a, \theta, \dots$ etc por $a_0, \theta_0 \dots\dots$ y se tendra

$$\text{I)} \quad \frac{d\delta_1 a_0}{dt} = \frac{2}{n_0 a_0} \frac{\partial R_0}{\partial \varepsilon}$$

$$\text{II)} \quad \frac{d\delta_1 \theta_0}{dt} = \frac{1}{n_0 a_0^2 \sqrt{1-a_0^2} \operatorname{sen} \varphi_0} \frac{\partial R_0}{\partial \varphi_0}$$

----

en las cuales $\quad R_0 = \sum C_0 \cos D_0$

$$D_0 = i(n_0 t + \varepsilon_0) + i'(n'_0 t + \varepsilon'_0) + k\,\bar{w}_0 + k'\bar{w}'_0 + j\theta_0 + j'\theta'_0$$

Integrando:

$$\delta_1 a_0 = \frac{2}{n_0 a_0} \int \frac{\partial R_0}{\partial \varepsilon_0} \, dt$$

$$\delta_1 \theta_0 = \frac{1}{n_0 a_0^2 \sqrt{1-e_0^2} \operatorname{sen} \varphi_0} \int \frac{\partial R_0}{\partial \varphi_0} \, dt$$

----

y como
$$\frac{\partial R_0}{\partial \varepsilon_0} = -\sum i\, C_0 \operatorname{sen} D_0$$
$$\frac{\partial R_0}{\partial \varphi_0} = \sum \frac{\partial C_0}{\partial \varphi_0} \cos D_0$$

----

todas las ecuaciones contienen las cuadraturas:

$$\int \text{sen } D_o \, dt = -\frac{\cos D_o}{in_o + i'n'_o}$$

$$\int \cos D_o \, dt = \frac{\text{sen } D_o}{in_o + i'n'_o}$$

se obtiene entonces:

$$(5)\left\{\begin{array}{l} \delta_1 a_o = \dfrac{2}{n_o a_o} \sum \dfrac{i\, C_o \cos D_o}{i n_o + i' n'_o} \\ \partial_1 \theta_o = \dfrac{1}{n_o a_o^2 \sqrt{1-e_o^2}\, \text{sen}\varphi_o} \sum \dfrac{\frac{\partial C_o}{\partial \varphi_o} \text{ sen } D_o}{i\, n_o + i' n'_o} \\ \text{-------------------------} \\ \text{-------------------------} \end{array}\right.$$

Desigualdades seculares: Si en el desarrollo (2) de la función perturbadora R se consideran los términos independientes de las longitudes medias $\ell = nt$ $\ell' = n't$ será para esos términos $i = 0$ $i' = 0$ en D_o y las integrales /

$\int \text{sen } D_o \, dt = t \text{ sen } D_o$ $\int \cos D_o \, dt = t \cos D_o$

reemplasadas en (5) darán:

$$(6)\left\{\begin{array}{l} \partial_1 a_o = 0 \\ \delta_1 \theta_o = \dfrac{t}{n_o a_o^2 \sqrt{1-e_o^2} \text{ sen } \varphi_o} \quad \dfrac{\partial C_o}{\partial \varphi_o} \cos D_o \\ \text{-------------------------} \end{array}\right.$$

se han introducido en todos los elementos θ, φ, e, ϖ y ε, excepto en a, términos proporcionales al tiempo o sea términos de la forma λt, a estos términos se los llama términos seculares o desigualdades seculares. Estos términos varían constantemente en el mismo sentido y son de gran importancia cuando se consideran dos estados del sistema solar separados por un número grande de siglos pues las desigualdades seculares modifican su aspecto de una manera marcada. En cambio los términos periódicos se compensan o quedan acotados. La primera relación (6) nos dice que en primera aproximación los grandes ejes de las órbitas no tienen desigualdades seculares.

También puede demostrarse que $\partial_1 n_o = 0$ o sea que los movimientos medios también son invariables.

Desigualdades de largo período:

Si se cumple que $i\, n_o + i' n'_o = 0$ sin que sean nulos i e i' se tendrá :

$$\frac{n_o}{n'_o} = \frac{i'}{i}$$ es decir la razón de los movimientos medios del planeta perturbado y el perturbador es conmensurable.

como : $$n_o = \sqrt{\frac{G(1+m)}{a_o^3}} \qquad n'_o = \sqrt{\frac{G(1+m')}{a_o'^3}}$$

los valores de n_o y n'_o que se obtienen no son conmensurables para ninguna combinación de los planetas tomados dos a dos. Pero lo que sí hay es un gran número de conmensurabilidades aproximadas es decir **valores** para los cuales $i\, n_o + i\, n'_o$ es pequeño.

Como esta expresión figura en los denominadores de (5) dá lugar a desigualdades de largo período es decir términos cuyo período $T_1 = \dfrac{2\pi}{i_o n_o + i'_o n'_o}$ es muy grande con respecto a $T_o = \dfrac{2\pi}{n_o}$ y $T'_o = \dfrac{2\pi}{n'_o}$

Por ejemplo si se toman el día solar medio como unidad los movimientos medios de Júpiter y Saturno son:

$$n_o = 299''\ 1284 \qquad n'_o = 120''\ 4547$$

y se cumple que $5\, n'_o - 2\, n_o = 4''\ 0167$ y el término correspondiente de la función perturbadora da lugar a una desigualdad de 900 años de período.

Desigualdades de corto período: Son perturbaciones cuyo período $\dfrac{2\pi}{i_o n_o + i'_o n'_o}$ es del orden de magnitud de T_o y T'_o para lo cual $i_o n_o + i'_o n'_o$ no debe ser muy pequeño. Estos términos son de la forma A cos D.

Términos mixtos: En el año 1809 Poisson prueba que no hay términos seculares en las perturbaciones de segundo orden del semieje mayor a, pero que sí existen términos de la forma t cos D llamados mixtos o de Poisson.

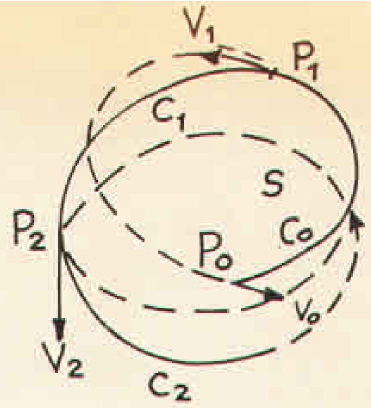

FIG. 1 - IV

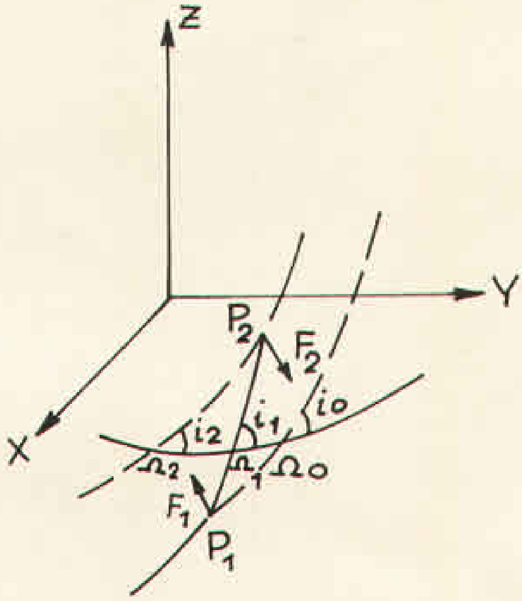

FIG. 2 - IV

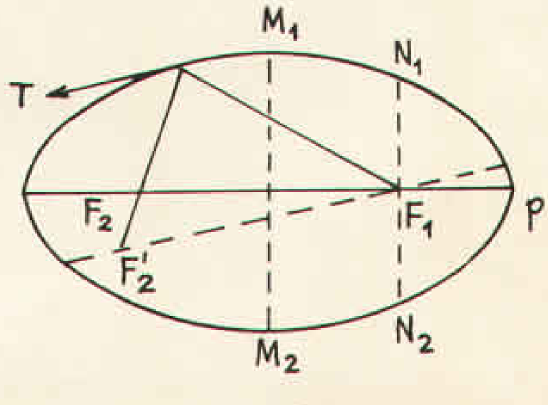

FIG. 3 - IV