Capitulo VI : Movimientos de la Luna

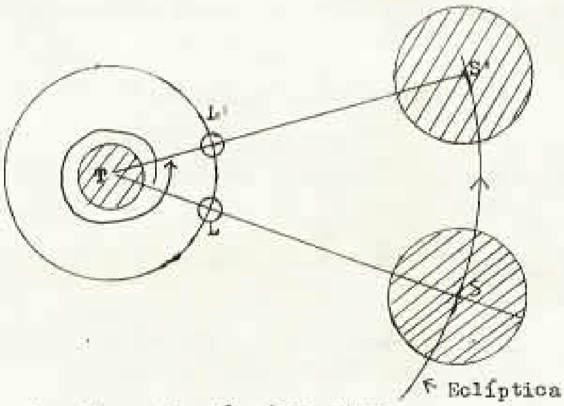
La Luna, nuestro único satélite natural, describe una elipse alrededor de la / Tierra y acompaña además a ésta en su revolución anual alrededor del Sol. La excentricidad de la órbita lunar es $e = 0,0549$ y la distancia media Tierra-Luna es $a = 60,27$ radios terrestres o sea $a = 384.000$ km. Este último valor resulta de / la fórmula $d = \frac{R♁}{P}$ en la cual la paralaje lunar, obtenida por métodos geométricos, es $P = 57'2''7$.

Actualmente la distancia a la Luna se obtiene midiendo el tiempo transcurrido entre la salida y vuelta de una onda electromagnética que se refleja en la Luna (radar).

Revolución sideral: Es el tiempo que tarda la Luna en efectuar una revolución completa alrededor de la Tierra. En un mes sideral la longitud de la Luna aumenta en 360°. Su duración es $S_d = 27$ días $7^h 43^m 12^s$.

Revolución sinódica: Es el tiempo transcurrido entre dos fases consecutivas de igual nombre. Se la llama mes lunar: $S_N = 29$ días $12^h\ 44^m\ 3^s$.

Como el Sol, en su movimiento anual aparente, se traslada sobre la eclíptica en sentido directo, es decir en el mismo sentido que la traslación de la Luna, la revolución sinódica es de mayor duración que la sideral




En la posición T - L - S conjunción: Luna nueva.

Para que se produzca la siguiente conjunción la longitud de la Luna debe aumentar en más de 360° pues en ese intervalo el Sol se ha movido de S a S' sobre la eclíptica. Si P es el período de traslación de la Tierra alrededor del Sol se cumple:

$$\frac{1}{S_d} - \frac{1}{P} = \frac{1}{S_N}$$

Debido a su movimiento de traslación alrededor de la Tierra la Luna se mueve aproximadamente 12° por día en sentido directo y por lo tanto sale cada día 55 minutos más tarde. En unas pocos horas de observación puede apreciarse este movimiento de la / Luna entre las estrellas en sentido contrario al movimiento diurno.

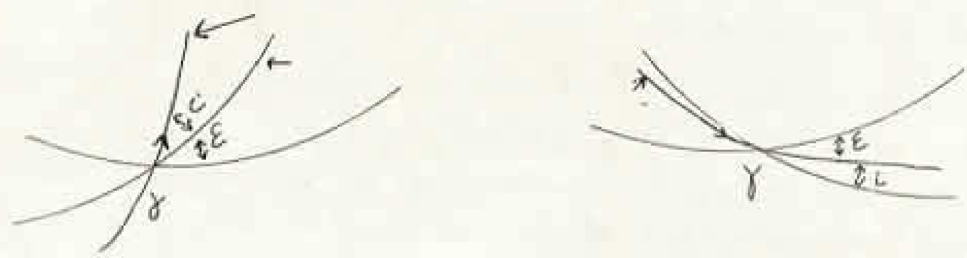
Los elementos orbitales de la Luna, con excepción del semieje y el período de revolución, varían muy rápidamente, debido principalmente a la acción perturbadora del Sol.

La inclinación de la órbita con respecto a la eclíptica tiene un valor medio de 5º15 variando de 5° a 5º3 en 173 días.

El nodo ascendente tiene un movimiento retrógrado y completa un giro sobre la eclíptica en 18,6 años (precesión lunar)

La revolución nodal o draconítica es por lo tanto de menor duración que la revolución sideral.

Otro efecto del movimiento de los nodos es la variación de la declinación de la Luna. Cuando el nodo ascendente coincide con γ la declinación varía de +29° a −29° en una revolución sideral; 9,3 años más tarde es el nodo descendente el que coincide con γ y la declinación varía de +18° a −18°.




El perigeo de la órbita se mueve en sentido directo y tarda 8,8 años en cumplir un giro.

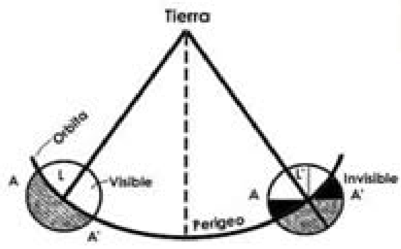
Como consecuencia de este movimiento la revolución anomalística, con respecto al perigeo, tiene un período mayor que el sideral.

La Luna rota sobre su eje en un tiempo igual al de revolución sideral, por lo tanto presenta siempre hacia la Tierra la misma cara.

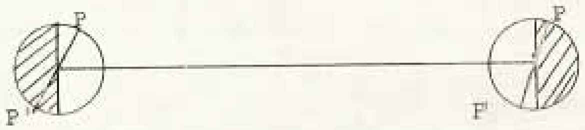
Los efectos de libración permiten sin embargo observar desde la Tierra el 59% de la superficie lunar.

Las libraciones fueron observadas por primera vez y explicadas por Galileo. Tres son de carácter geométrico:

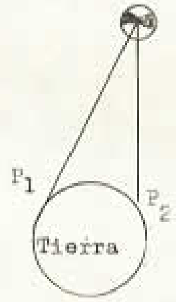
1) Libración en longitud es de ± 8° y se debe a que la rotación es uniforme y la traslación en cambio es más rápida en el perigeo que en el apogeo (ley de las áreas)



2) Libración en latitud: de $\pm 6°$ es debida a la inclinación del eje de rotación de 83° con respecto al plano de la órbita, se ve alternativamente el polo norte y el sur lunar.




3) Libración diurna: es menor que 1° y es el efecto de paralaje por el desplazamiento del observador.




Existe tambien otro efecto, llamado libración física, que produce irregularidades pequeñas en su rotación y que se debe a que la Luna no es perfectamente esférica y por lo tanto la atracción del Sol y la Tierra es mayor en la dirección del "abultamiento" lunar.

## Teoría de la Luna

La Luna, por ser el cuerpo celeste más proximo a la Tierra, es el que puede ser observado con mayor precision.
El problema de su movimiento, conocido en Mecánica Celeste con el nombre de Teoría lunar exige un refinamiento no aplicable a los demás astros.
Numerosos astrónomos han creado diversos métodos para resolver el problema lunar y es así como las teorías de Laplace, Pontecoulant, Hansen, Delaunay, Hill y Brown, constituyen orignales e importantes contribuciones a la Mecanica Celeste y al progreso de la ciencia.

Problema Principal: Consiste en encontrar el movimiento de la Luna bajo la atracción gravitacional de la Tierra y el Sol. Se desprecian las perturbaciones ejercidas por los otros planetas, así como también el efecto debido al aplastamiento terrestre. La parte principal de las perturbaciones se obtiene suponiendo que el solo astro perturbador es el Sol y que la Tierra se desplaza a su alrededor describiendo una elipse kepleriana fija.
Para representar el movimiento de la Luna se calculan las variaciones de los elementos osculadores o las de las coordenadas esféricas.
Esas variaciones se expresan bajo la forma de una suma de términos periodicos llamados desigualdades.

Esas desigualdades son deformaciones de la órbita de base y provienen de diversos términos de la función perturbadora.
Algunas desigualdades son conocidas desde hace siglos.
Hiparco ya conocía la evección y Kepler la variación.
También se conocían en la antigüedad la retrógradación de los nodos y el avance del perigeo cuyos períodos determinan junto con el mes lunar la recurrencia de los eclipses.

Ecuaciones de movimiento: Si se desprecia la masa de la Luna y a la Tierra y el Sol se los considera puntos masa pueden escribirse las ecuaciones de movimiento.
Si $x$ $y$ $z$ son las coordenadas de la Luna y $x'$ $y'$ $z'$ las del Sol en un sistema de coordenadas rectangulares con centro en el centro de la Tierra, las ecuaciones del movimiento de la Luna son:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k^2Ex}{r^3} = \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{k^2Ey}{r^3} = \dfrac{\partial R}{\partial y} \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} + \dfrac{k^2Ez}{r^3} = \dfrac{\partial R}{\partial z} \end{array}\right. \qquad (1)$$

con $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$R = R^2 m' \quad \frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}$$

$E$ masa de la Tierra

$m'$ masa del Sol

Si la órbita de la Tierra alrededor del Sol se la considera una elipse fija / cuyo plano es el $xy$ será $z' = 0$

Si $\Delta$ es la distancia Sol-Luna:

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \\ &= r^2 + r'^2 - 2(xx' + yy') \\ &= r^2 + r'^2 - 2rr' \cos S \qquad (2) \end{aligned}$$

donde $S$ es el ángulo en la Tierra entre las direcciones a la Luna y al Sol.
En el caso lunar la razón $\frac{r}{r'}$ es lo suficientemente pequeña para permitir el desarrollo de $\frac{1}{\Delta}$ en potencias de esa razón, en el caso planetario la convergencia es muy pequeña.

De (2) $\dfrac{r'}{\Delta} = \left[1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 - 2\,\frac{r}{r'} \cos S\right]^{-\frac{1}{2}}$

Si $\rho = \frac{r}{r'}$ el desarrollo en serie de potencias de $\rho$ será:

$$\frac{r'}{\Delta} = 1 + \rho P_1(\cos S) + \rho^2 P_2(\cos S) + C^3 P_3(\cos S) + \ldots\ldots$$

$P_o$ $P_1$ $P_2$ $P_3$ son los polinomios de Legendre.

Introduciendo este desarrollo en la función perturbadora se obtiene:

$$R = \frac{k^2 m'}{r'^3}\left[\frac{r^2}{r'^2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos^2 S\right)+\frac{r^3}{r'^3}\left(-\frac{3}{2}\cos S+\frac{5}{2}\cos^3 S\right)+\ldots\ldots\right]$$

En este desarrollo se ignora la masa de la Luna.

Introducción de los elementos elípticos

$\Omega$ longitud del nodo ascendente de la órbita lunar.

y inclinación de la orbita de la Luna con respecto a la eclíptica.

w distancia del perigeo al nodo ascendente de la Luna.

f anomalía verdadera de la Luna.

w' f' valores correspondientes al Sol.

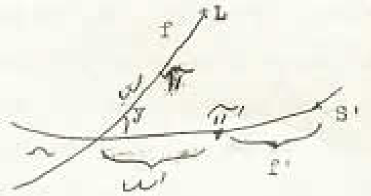
$\psi = \Omega + w + f$ longitud verdadera de la Luna.

$\psi' = \Omega' + w' + f'$ longitud verdadera del Sol.

De la fórmula del coseno de la trigonometría esférica se obtiene:

$$\cos S = \cos(w+f)\cos(w'+f') + \operatorname{sen}(w+f)\operatorname{sen}(w'+f')\cos y$$

$$= \cos^2\frac{y}{2}\cos(\psi-\psi') + \operatorname{sen}^2\frac{y}{2}\cos(\psi+\psi'-2\Omega)$$




Se reemplaza cos S y sus potencias en la expresión de R.

Ademas por la tercera ley de Kepler el movimiento de masa Tierra-Luna alrededor del Sol da

$$k^2(m' + E + M) = n'^2 a'^3$$

Como $\frac{E+M}{m'} \cong \frac{1}{330{,}000}$ $\qquad k^2 m' \simeq n'^2 a'^3$

Resulta:

$$R = n'^2 a^2\left[\frac{r^2}{a^2}\frac{a'^3}{r'^3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos^2 S\right)+\right.$$
$$+\frac{a}{a'}\frac{r^3}{a^3}\frac{a'^4}{r'^4}\left(-\frac{3}{2}\cos S+\frac{5}{2}\cos^3 S\right)+$$
$$+\ldots\ldots\ldots$$

$$= R_1 + R_2 R_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Introduciendo los elementos elípticos y teniendo en cuenta que

$e = 0.0549$ $\qquad e' = 0.0168$

$\gamma = \operatorname{sen} y = 0.0897$ $\qquad \frac{a}{a'} = 0.0025$

si $\ell$ $\ell'$ son las anomalías medias de la Luna y el Sol .

$\lambda$ $\lambda'$ son las longitudes medias de la Luna y el Sol.

$\ell = \lambda - \overline{\omega}$ $\qquad\qquad \ell' = \lambda' - \overline{\omega}'$

Los términos de mayor significación en el movimiento de la Luna se obtienen seleccionando los siguientes términos de la función perturbadora:

$$R = n'^2 a^2 \Big[ \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos(2\lambda - 2\lambda') - \frac{1}{2}\ e \cos(\lambda - \overline{W}) -$$

$$- \frac{9}{4}\ e \cos(\lambda - 2\lambda' + \overline{W}) + \frac{3}{4}\ e \cos(3\lambda - 2\lambda' - \overline{W})$$

$$+ \frac{3}{4}\ e' \cos(\ \ ' - W') + \frac{3}{8}\ e^2 + \frac{15}{8}\ e^2 \cos(2\lambda' - \overline{W})$$

$$+ \frac{3}{8}\ e'^2 - \frac{3}{8}\gamma^2 + \frac{3}{8}\gamma^2 \cos(2\lambda' - 2\,\Omega) +$$

$$+ \frac{3}{8}\ \frac{a}{a'} \cos(\lambda - \lambda') + \frac{5}{8}\ \frac{a}{a'} \cos(3\lambda - 3\lambda')$$

$$- \frac{15}{16}\ \frac{a}{a'}\ e \cos(\lambda' - \overline{W}) - \frac{15}{16}\ \frac{a}{a'}\ e\, e' \cos(\overline{W} - \overline{W}') \Big]$$

Propiedades de la función perturbadora

El valor de S es independiente del origen elegido para pedir $\varphi$ y $\varphi'$. Los ángulos $\lambda$ $\lambda'$ $\overline{W}$ $\overline{W}'$ que aparecen en combinaciones lineales en los argumentos de los términos periódicos en R están medidos a partir del mismo origen. Si todos los ángulos se incrementan en una cantidad arbitraria el desarrollo de R no debe cambiar. Es por lo tanto necesario que la suma de los coeficientes de esos argumentos sea cero para cada término en R

$$i_1 \lambda + i_2 \lambda' + i_3 \overline{W} + i_4 \overline{W}' \text{ debe ser tal que}$$

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

Si se utilizan las anomalías medias esos argumentos son

$$(i_1 + i_3)\lambda + (i_2 + i_4)\lambda' - i_3\varphi - i_4\varphi'$$

donde $\varphi = \ \ - \overline{W}$

$\varphi = \lambda' - W'$

Escribiendo los argumentos en la forma:

$$P_1 (\lambda - \lambda') + P_2\varphi + P_3\varphi'$$

Debe ser $P_1$ igual a <u>0</u> o a un entero positivo y $P_2$ $P_3$ cualquier entero positivo, negativo o <u>0</u> .

En los términos de $R_1$ debe ser $P_1 = 0$ ó $P_1 = 2$

en $R_2$ $\qquad P_1 = 1$ ó $P_1 = 3$

en $R_3$ $\qquad P_1 = 0$ ó $P_1 = 2$ ó $P_1 = 4$.

También existe relación entre las potencias de $e$ en el coeficiente de un término y el múltiplo $P_2$ de $\varphi$ en el argumento. Lo mismo entre las potencias de // $e'$ y $P_3$.

$e^{|P_2| + 2R}$ $\quad e'^{|P_3| + 2R'}$ $\quad R, R' = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots$

Integración de los principales términos por el método de variación de las constantes arbitrarias.

Aplicando las ecuaciones de Lagrange a la función perturbadora R se obtiene la variación de los elementos.

Se puede tratar cada término o grupo de términos separadamente, debiendo considerarse primero los términos seculares.

Términos seculares

Si la función perturbadora se limita a los términos:

$$R_S = n'^2 a^2 \left[ \frac{1}{4} + \frac{3}{8} e^2 + \frac{3}{8} e'^2 - \frac{3}{8} \gamma^2 \right]$$

Las ecuaciones de Lagrange resultan:

$$\frac{da}{dt} = 0 \qquad \frac{d\varepsilon_1}{dt} = -\frac{n'^2}{n} \left[ 1 + \frac{3}{2} e + \frac{3}{2} e'^2 - \frac{3}{2} \gamma^2 \right]$$

$$\frac{de}{dt} = 0 \qquad \frac{d\bar{w}}{dt} = +\frac{3}{4} \frac{n'^2}{n}$$

$$\frac{d}{dt} = 0 \qquad \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{4} \frac{n'^2}{n}$$

Integrando se obtiene:

$$a = a_0 \qquad \bar{\varepsilon}_1 = -\frac{n'^2}{n^2} \left( 1 + \frac{3}{2} e_0^2 + \frac{3}{2} e'^2 - \frac{3}{2} \gamma_0^2 \right. \bar{n} t + \varepsilon_{10}$$

$$e = e_0 \qquad \bar{w} = +\frac{3}{4} \frac{n'^2}{n^2} \bar{n} t + w_0$$

$$\gamma = o$$

$$\Omega = -\frac{3}{4} \frac{n'^2}{n^2} \bar{n} t + \Omega_0$$

La raya sobre algunos términos indica un valor medio sin términos periódicos.

Como $\bar{\varepsilon}_1$ es lineal negativa del tiempo, el movimiento medio de la Luna observado es menor que el no perturbado que por la tercera ley de Kepler corresponde al valor $a_0$ $\quad \bar{w} = \bar{w}_1 t + \bar{w}_0$ como $\bar{w}_1$ es positivo el perigeo tiene un movimiento directo.

Puede ponerse $\bar{w} = (1-c)\, \bar{n} t + \bar{w}_0$ y se obtiene el valor medio de la anomalía media: $\ell = \bar{\lambda} - \bar{w} = c\bar{n}t + \ell_0$ indica que el mes anomalístico es mayor que el sidéreo.

Poniendo $m = \frac{n'}{n} \simeq 0.0748013$

$$\bar{w}_1 = + \frac{3}{4} m^3 \bar{n}$$

$$c = 1 - \frac{3}{4} m^2 \qquad (c < 1).$$

La expresión $\Omega = \Omega_1 t + \Omega_0$ con $\Omega_1$ negativo indica que el nodo ascendente de la órbita lunar tiene un movimiento retrógrado

Si ponemos $\Omega = (1-g)\bar{n}t + \Omega_0$ (con $g > 1$).

El argumento de latitud será

$F = \lambda - \Omega = g\bar{n}t + F_0$ o sea que el mes nodal o draconítico es más corto que el sideral.

El método empleado es mucho más conveniente para obtener las perturbaciones del sol sobre los satélites para los cuales el cociente $m = \frac{n'}{n}$ es pequeño comparado con el valor del sistema Tierra-Luna. (Ver tablas dadas en Brown pág. 322 donde se comparan los valores de la Luna y Júpiter IV).

---

Principales desigualdades del movimiento de la Luna.

El término $+ \frac{3}{4} n'^2 a^2 \cos(2\lambda - 2\lambda')$ introducido en las ecuaciones de Lagrange dá como resultado para $\frac{\partial a}{a} = \frac{\partial r}{a} = + \frac{3}{2} m^2 \cos(2\lambda - 2\lambda')$

Además términos con distinto argumento en la función perturbadora se combinan y forman términos con argumento común en $\partial \psi$ y $\frac{\partial r}{a}$

Sumando los resultados se obtiene

$$\partial \psi = + \frac{11}{8} m^2 \operatorname{sen}(2\lambda - 2\lambda')$$

$$\frac{\partial r}{a} = - m^2 \cos(2\lambda - 2\ \ ')$$

Esta desigualdad llamada variación era desconocida por los griegos, fue descubierta por Tycho Brake. Su período es la mitad del mes sinódico y por lo tanto no afecta el tiempo de los eclipses. La amplitud de la variación en longitud es de 39' 29" q.

Los términos con argumento $4\lambda - 4\lambda'$, $6\lambda - 6\lambda'$ también se consideran desigualdades variacionales.

La evección es la mayor perturbación periódica de la longitud de la Luna.

El término $+\frac{15}{8} n'^2 a^2 e^2 \cos(2\lambda' - 2\bar{w})$

dá para $\partial\psi = \frac{15}{4} m\, e\, \mathrm{sen}(\lambda - 2\lambda' + \bar{w})$ la amplitud es de $+1° 16' 25''.4$ y

el período de 31,812 días.

La significación de este término se debe a la ausencia de $\lambda$ en el argumento que introduce un divisor $n'$ en la integración.

La evección ya conocida por Hiparco desplaza a la Luna $2\frac{1}{2}$ veces su diámetro.

---

## Perturbación principal en latitud

Proviene de $+\frac{3}{8} n'^2 a^2 \gamma^2 \cos(2\lambda' - 2\Omega)$ que introducido en las ecuaciones de Lagrange produce la perturbación en latitud $\delta\beta$ :

$$\delta\beta = +\frac{3}{8} m\, \gamma\, \mathrm{sen}(\lambda - 2\lambda' + \Omega)$$

su amplitud es $+10' 23''.7$ y el período 32,28 días.

---

## La desigualdad paraláctica

El término $-\frac{15}{16} m'^2 a^2 \frac{a'}{a'} e \cos(\lambda' - \bar{w})$

produce

$$\delta\psi = -\frac{15}{8} m \frac{a}{a'}\, ,\ \mathrm{sen}(\lambda - \lambda') \qquad \frac{dr}{a} = +\frac{15}{16} m \frac{a}{a'} \cos(\lambda - \lambda')$$

El período es el mes sinódico y la amplitud para la longitud $-2' 4''.8$.

Es la mayor desigualdad que tiene $\frac{a}{a'}$ como factor.

La comparación de la amplitud con la observación permite determinar la paralaje solar. La dificultad del método se debe a que el período, igual al mes sinódico introduce efectos de fase.

---

## La ecuación anual

el término $+\frac{3}{4} n'^2 a^2 e' \cos(\lambda - \bar{w}')$ también produce una reducción del orden con respecto a $m$ .

El período es de un año anomalístico y el coeficiente del término con este argumento en longitud es $-11' 8''.9$.

Depende de la excentricidad $e'$ de la órbita terrestre.

Existen otras desigualdades que no han recibido nombre. Existen 13 de longitud de amplitud superior a 100" y otras 46 de amplitudes comprendidas entre 1" y 100".

La teoría de Brown que actualmente se utiliza en las efemérides distingue 310 de períodos todos distintos.

---

Teorías de la Luna

Una teoría lunar consiste en el cálculo de todas las desigualdades de amplitud superior a un cierto límite de modo de poder representar la trayectoria observada de la Luna. Se resuelve el problema principal y se obtienen las coordenadas geocéntricas de la Luna: longitud, latitud y radio-vector, en función del tiempo. Las diferencias entre dos teorías consisten en el sistema de coordenadas elegido, en la órbita de comparación llamada intermediaria y en el orden en que se eliminan las dificultades.

Las teorías que se utilizan son principalmente las de Hansen, Delaunay y Hill-Brown.

0-0-0-0-0-0-0-0