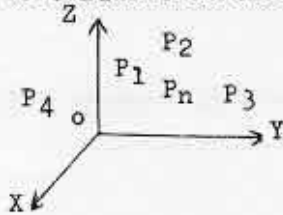


Apéndice

I: El problema de n cuerpos.

Es el problema fundamental de la Mecánica Celeste y puede ser enunciado de la siguiente manera:

Determinar el movimiento de un conjunto de n partículas, aisladas en el espacio, que se atraen de acuerdo a la Ley de gravitación de Newton y cuyas posiciones y velocidades se conocen en un instante dado.



Con respecto a un sistema inercial de referencia, una cualquiera de las partículas P_i tendrá coordenadas (x_i, y_i, z_i) y componentes de velocidad $(\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)$

La distancia entre dos partículas P_i y P_j será r_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n$)
($j = 1, 2, \dots, n$)

De acuerdo a la Ley de Newton, sobre P_1 actúan $(n - 1)$ fuerzas debidas a la atracción de las restantes partículas.

Por ejemplo P_2 ejerce sobre P_1 la fuerza: $\frac{-Gm_1m_2}{r_{12}^2}$

Las componentes de esta fuerza en la dirección de los ejes coordenados son:

$$\frac{-Gm_1m_2}{r_{12}^2} \quad \frac{x_1 - x_2}{r_{12}}$$

$$\frac{-Gm_1m_2}{r_{12}^2} \quad \frac{y_1 - y_2}{r_{12}}$$

$$\frac{-Gm_1m_2}{r_{12}^2} \quad \frac{z_1 - z_2}{r_{12}}$$

La fuerza total ejercida por las $(n - 1)$ partículas sobre P_1 , en dirección paralela al eje X será:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -Gm_1 \sum_{j=2}^n \frac{m_j}{r_{1j}^2} \frac{(x_1 - x_j)}{r_{1j}}$$

Considerando la atracción sobre cada cuerpo i ($i = 1, 2, \dots, n$) ejercida por los j cuerpos restantes ($j = 1, 2, \dots, n$) siendo $j \neq i$ resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(1) \quad \begin{cases} m_1 \ddot{X}_1 = G m_1 \sum_{j=1}^n m_j \frac{X_1 - X_j}{r_{1j}^3} \\ m_1 \ddot{Y}_1 = G m_1 \sum_{j=1}^n m_j \frac{Y_1 - Y_j}{r_{1j}^3} \\ m_1 \ddot{Z}_1 = G m_1 \sum_{j=1}^n m_j \frac{Z_1 - Z_j}{r_{1j}^3} \end{cases}$$

Este sistema es de orden 6n ya que se trata de 3n ecuaciones de segundo orden. Si se define la función potencial:

$$U = G \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (j \neq i)$$

esta función depende de las distancias relativas de los cuerpos y es independiente del sistema de coordenadas.

Se tiene que:
$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = G m_1 \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{r_{1j}^3} (X_1 - X_j) = - G m_1 \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{r_{1j}^3} \frac{X_1 - X_j}{r_{1j}}$$

Las (1) pueden escribirse:

$$(2) \quad \begin{aligned} m_1 \ddot{X}_1 &= \frac{\partial U}{\partial X_1} \\ m_1 \ddot{Y}_1 &= \frac{\partial U}{\partial Y_1} \\ m_1 \ddot{Z}_1 &= \frac{\partial U}{\partial Z_1} \end{aligned}$$

Movimiento del centro de masa:

Si se desplaza el origen en la dirección X:

$$X'_1 = X_1 + a$$

Será:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial X'_i} \frac{\partial X'_i}{\partial a}$$

El primer miembro $\frac{\partial U}{\partial a}$ es 0 pues U no depende explícitamente de a y como

$\frac{\partial X'_i}{\partial a} = 1$ debe ser:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial X'_i} = 0$$

Como el nuevo origen es arbitrario podemos escribir:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial X_i} = 0 \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial Y_i} = 0 \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial Z_i} = 0$$

De (2) resulta:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{X}_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n m_i \ddot{Y}_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n m_i \ddot{Z}_i = 0 \end{cases}$$

Integrando estas ecuaciones:

$$(3) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n m_i \dot{X}_i = \alpha_1 \\ \sum_{i=1}^n m_i \dot{Y}_i = \beta_1 \\ \sum_{i=1}^n m_i \dot{Z}_i = \gamma_1 \end{cases}$$

Integrando nuevamente:

$$(4) \quad \begin{cases} \sum m_i X_i = \alpha_1 t + \alpha_2 \\ \sum m_i Y_i = \beta_1 t + \beta_2 \\ \sum m_i Z_i = \gamma_1 t + \gamma_2 \end{cases}$$

Si $(\bar{X} \bar{Y} \bar{Z})$ son las coordenadas de baricentro y $\sum_{i=1}^n m_i = M$ se cumple:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i X_i}{M} \quad \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i Y_i}{M} \quad \bar{Z} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i Z_i}{M}$$

Luego de (3) :

$$\frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}{M} = V^2$$

La velocidad del baricentro es constante.

tante.

De (4) eliminando t:

$$\frac{M\bar{X} - \alpha_2}{\alpha_1} = \frac{M\bar{Y} - \beta_2}{\beta_1} = \frac{M\bar{Z} - \gamma_2}{\gamma_1} \quad \text{el baricentro se mueve}$$

sobre una recta en el espacio.

Las tres integrales de las áreas: La función potencial U no cambia por una rotación de ejes. Si suponemos que el sistema de coordenadas rota alrededor del eje Z en un ángulo φ y las nuevas coordenadas son X'_1, Y'_1, Z'_1 la rotación está dada por:

$$(a) \begin{cases} X'_1 = X_1 \cos \varphi - Y_1 \sin \varphi \\ Y'_1 = X_1 \sin \varphi + Y_1 \cos \varphi \\ Z'_1 = Z_1 \end{cases}$$

Como U no contiene φ explícitamente:

$$\frac{dU}{d\varphi} = 0$$

Pero:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \sum \frac{\partial U}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial \varphi} + \sum \frac{\partial U}{\partial Y_1} \frac{\partial Y_1}{\partial \varphi} + \sum \frac{\partial U}{\partial Z_1} \frac{\partial Z_1}{\partial \varphi} = 0 \quad (b)$$

De (a):

$$\frac{\partial X_1}{\partial \varphi} = -Y'_1 \quad \frac{\partial Y_1}{\partial \varphi} = X'_1 \quad \frac{\partial Z_1}{\partial \varphi} = 0$$

Luego (b) resulta:

$$\sum \left[X_1 \frac{\partial U}{\partial Y_1} - Y_1 \frac{\partial U}{\partial X_1} \right] = 0$$

Como esta relación es válida también para el sistema coordenado (X_1, Y_1, Z_1) :

$$\sum \left[X_1 \frac{\partial U}{\partial Y_1} - Y_1 \frac{\partial U}{\partial X_1} \right] = 0$$

y reemplazando

$$\frac{\partial U}{\partial X_1}, \frac{\partial U}{\partial Y_1} \text{ Por sus valores (2):}$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_i m_i \left[X_1 \ddot{Y}_1 - Y_1 \ddot{X}_1 \right] &= 0 \\ \text{análogamente } \sum_i m_i \left[Y_1 \ddot{Z}_1 - Z_1 \ddot{Y}_1 \right] &= 0 \\ \sum_i m_i \left[Z_1 \ddot{X}_1 - X_1 \ddot{Z}_1 \right] &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Integrando estas últimas ecuaciones se obtiene:

$$(c) \begin{cases} \sum m_i (\dot{X}_i \dot{Y}_i - Y_i \dot{X}_i) = C_1 \\ \sum m_i (\dot{Y}_i \dot{Z}_i - Z_i \dot{Y}_i) = C_2 \\ \sum m_i (\dot{Z}_i \dot{X}_i - X_i \dot{Z}_i) = C_3 \end{cases}$$

Puede decirse que (C_1, C_2, C_3) son los cosenos directores de un eje asociado al momento angular del sistema.

El plano perpendicular a dicho eje fue llamado "plano invariable" por Laplace, se lo llama también plano de Laplace.

En (c) los paréntesis son las proyecciones de las velocidades areales de los cuerpos sobre los tres planos fundamentales.

Si llamamos $\frac{dA_i}{dt}, \frac{dB_i}{dt}, \frac{dC_i}{dt}$ a esas proyecciones, las (c) pueden escribirse:

$$\begin{cases} \sum m_i \frac{dA_i}{dt} = C_1 \\ \sum m_i \frac{dB_i}{dt} = C_2 \\ \sum m_i \frac{dC_i}{dt} = C_3 \end{cases}$$

integrando:

$$\begin{cases} \sum m_i A_i = C_1 t + C_1' \\ \sum m_i B_i = C_2 t + C_2' \\ \sum m_i C_i = C_3 t + C_3' \end{cases}$$

Estas ecuaciones expresan que las sumas de los productos de las masas por las proyecciones de las áreas descritas por los radios correspondientes son proporcionales a los tiempos.

La integral de la energía: Multiplicando las ecuaciones (2) por $\frac{dX_i}{dt}, \frac{dY_i}{dt}$ y $\frac{dZ_i}{dt}$

respectivamente y sumando con respecto a i se encuentra que:

$$\sum_{i=1}^n m_i \left[\frac{d^2 X_i}{dt^2} \cdot \frac{dX_i}{dt} + \frac{d^2 Y_i}{dt^2} \cdot \frac{dY_i}{dt} + \frac{d^2 Z_i}{dt^2} \cdot \frac{dZ_i}{dt} \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial U}{\partial X_i} \frac{dX_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial Y_i} \frac{dY_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial Z_i} \frac{dZ_i}{dt} \right] = \frac{dU}{dt}$$

Integrando ambos miembros de la ecuación se obtiene:

$$\frac{1}{2} \sum m_i \left[\left(\frac{dX_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dY_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dZ_i}{dt} \right)^2 \right] = U + C$$

El primer miembro es la energía cinética del sistema, U la energía potencia y C constante de integración.

La integral expresa entonces que la suma de la energía cinética más la potencia es una constante.

Se han obtenido 10 integrales del problema: 6 correspondientes al movimiento del centro de masa; 3 integrales de las áreas y 1 de la energía. El problema se ha reducido al orden 6n - 10. Bruns y Poincaré han demostrado que no existen nuevas integrales algebraicas del sistema.

Traslado del origen a uno de los cuerpos: Movimiento relativo.

Si tomamos un sistema de coordenadas con origen en P₁ debemos efectuar la traslación:

$$X_i = X'_i + X_1 \quad Y_i = Y'_i + Y_1 \quad Z_i = Z'_i + Z_1$$

y como $X_i - X_j = X'_i - X'_j$ resulta: $\frac{\partial U}{\partial X_i} = \frac{\partial U}{\partial X'_i}$

$$\text{análogamente: } \frac{\partial U}{\partial Y_i} = \frac{\partial U}{\partial Y'_i}$$

$$\frac{\partial U}{\partial Z_i} = \frac{\partial U}{\partial Z'_i}$$

Luego las (2) pueden escribirse:

$$(2') \quad \begin{cases} \frac{d^2 X'_i}{dt^2} + \frac{d^2 X_1}{dt^2} = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial X'_i} \\ \frac{d^2 Y'_i}{dt^2} + \frac{d^2 Y_1}{dt^2} = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial Y'_i} \\ \frac{d^2 Z'_i}{dt^2} + \frac{d^2 Z_1}{dt^2} = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial Z'_i} \end{cases}$$

el nuevo origen es $X_1 = Y_1 = Z_1 = 0$

$$\text{y como } \frac{\partial U}{\partial X_i} = -G m_i \sum_{j=1}^n \frac{X_i - X_j}{r_{ij}^3}$$

para i = 1 la primera ecuación de (2') da:

$$\frac{d^2 X_1}{dt^2} = G \sum_{j=2}^n \frac{m_j X_{1,j}}{r_{j,1}^3}$$

Si la función potencial se descompone en la suma:

$$U = G m_1 \sum_{i=2}^n \frac{m_i}{r_{i,1}} + \frac{G}{2} \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n \frac{m_i m_j}{r_{i,j}} \quad (i \neq j)$$

$$U = G m_1 \sum_{i=2}^n \frac{m_i}{r_{i,1}} + U'$$

Sustituyendo en (2'), las ecuaciones que corresponden al cuerpo P_n serán:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 X'_{1,n}}{dt^2} + G (m_1 + m_n) \frac{X'_{1,n}}{r_{1,n}^3} &= \frac{1}{m_n} \frac{\partial U'}{\partial X'_{1,n}} - G \sum_{j=2}^{n-1} \frac{m_j X'_{1,j}}{r_{j,1}^3} \\ \frac{d^2 Y'_{1,n}}{dt^2} + G (m_1 + m_n) \frac{Y'_{1,n}}{r_{1,n}^3} &= \frac{1}{m_n} \frac{\partial U'}{\partial Y'_{1,n}} - G \sum_{j=2}^{n-1} \frac{m_j Y'_{1,j}}{r_{j,1}^3} \\ \frac{d^2 Z'_{1,n}}{dt^2} + G (m_1 + m_n) \frac{Z'_{1,n}}{r_{1,n}^3} &= \frac{1}{m_n} \frac{\partial U'}{\partial Z'_{1,n}} - G \sum_{j=2}^{n-1} \frac{m_j Z'_{1,j}}{r_{j,1}^3} \end{aligned} \right.$$

Omitiendo los acentos y definiendo $R_{i,j}$:

$$R_{i,j} = G \left(\frac{1}{r_{i,j}} - \frac{X_i X_j + Y_i Y_j + Z_i Z_j}{r_{i,j}^3} \right) \quad (i \neq j)$$

Las ecuaciones generales del movimiento relativo resultan:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 X_i}{dt^2} + G (m_1 + m_i) \frac{X_i}{r_{i,1}^3} &= \sum_{j=2}^n \frac{\partial R_{ij}}{\partial X_i} \quad (i \neq j) \\ \frac{d^2 Y_i}{dt^2} + G (m_1 + m_i) \frac{Y_i}{r_{i,1}^3} &= \sum_{j=2}^n \frac{\partial R_{ij}}{\partial Y_i} \quad (i = 2, 3, \dots, n) \\ \frac{d^2 Z_i}{dt^2} + G (m_1 + m_i) \frac{Z_i}{r_{i,1}^3} &= \sum_{j=2}^n \frac{\partial R_{ij}}{\partial Z_i} \end{aligned} \right.$$

Para $n = 3$ si $r_{12} = r_2$ $r_{13} = r_3$

$$R_{2,3} = \frac{1}{r_{2,3}} - \frac{X_2 X_3 + Y_2 Y_3 + Z_2 Z_3}{r_{2,3}^3}$$

$$R_{3,2} = \frac{1}{r_{3,2}} - \frac{X_3 X_2 + J_3 J_2 + Z_3 Z_2}{r_2^3}$$

Las ecuaciones son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 X_2}{dt^2} + G(m_1 + m_2) \frac{X_2}{r_2^3} = G m_3 \frac{\partial R_{2,3}}{\partial X_2} \\ \frac{d^2 Y_2}{dt^2} + G(m_1 + m_2) \frac{Y_2}{r_2^3} = G m_3 \frac{\partial R_{2,3}}{\partial Y_2} \\ \frac{d^2 Z_2}{dt^2} + G(m_1 + m_2) \frac{Z_2}{r_2^3} = G m_3 \frac{\partial R_{2,3}}{\partial Z_2} \\ \frac{d^2 X_3}{dt^2} + G(m_1 + m_3) \frac{X_3}{r_3^3} = G m_2 \frac{\partial R_{3,2}}{\partial X_3} \\ \frac{d^2 Y_3}{dt^2} + G(m_1 + m_3) \frac{Y_3}{r_3^3} = G m_2 \frac{\partial R_{3,2}}{\partial Y_3} \\ \frac{d^2 Z_3}{dt^2} + G(m_1 + m_3) \frac{Z_3}{r_3^3} = G m_2 \frac{\partial R_{3,2}}{\partial Z_3} \end{array} \right.$$

La función $m_3 R_{2,3}$ recibe el nombre de función perturbadora, si $m_3 = 0$ el problema se transforma en un problema de dos cuerpos y las tres primeras ecuaciones corresponden al movimiento relativo de P_2 con respecto a P_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 X_2}{dt^2} = - G(m_1 + m_2) \frac{X_2}{r_2^3} \\ \frac{d^2 Y_2}{dt^2} = - G(m_1 + m_2) \frac{Y_2}{r_2^3} \\ \frac{d^2 Z_2}{dt^2} = - G(m_1 + m_2) \frac{Z_2}{r_2^3} \end{array} \right.$$

Apéndice

III Resolución de la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{\mu}{h^2}$$

que corresponde a la ecuación polar de la órbita en el problema de dos cuerpos.

Haciendo $\frac{1}{r} = R$ la ecuación resulta:

$$\frac{d^2 R}{d\theta^2} + R = \frac{\mu}{h^2} \quad \text{ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea.}$$

La ecuación característica es:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \text{cuyas raíces son} \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= +i \\ \lambda_2 &= -i \end{aligned}$$

luego la solución de la ecuación homogénea es:

$$R = A \cos \theta + B \sin \theta$$

y la solución de la ecuación completa se obtiene sumando a esta última una solución particular de la completa:

$$R = A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{\mu}{h^2} \quad (1)$$

Debemos determinar las constantes A y B de integración:

En el periastro: $R_0 = A \cos \theta_0 + B \sin \theta_0$

$$\left(\frac{dR}{d\theta} \right)_0 = -A \sin \theta_0 + B \cos \theta_0 = 0 \quad \text{pues en el periastro R es}$$

constante.

De la última: $A = \frac{B \cos \theta_0}{\sin \theta_0}$

luego

$$R_0 = B \left(\frac{\cos^2 \theta_0}{\sin \theta_0} + \sin \theta_0 \right) + \frac{\mu}{h^2}$$

$$R_0 \sin \theta_0 = B (\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0) + \frac{\mu}{h^2} \sin \theta_0$$

$$\left(R_0 - \frac{\mu}{h^2} \right) \sin \theta_0 = B$$

$$\left(R_0 - \frac{\mu}{h^2} \right) \cos \theta_0 = A$$

sustituyendo en (1):

$$R = \left(R_0 - \frac{\mu}{h^2} \right) (\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0) + \frac{\mu}{h^2}$$

$$R = \left(R_0 - \frac{\mu}{h^2} \right) \cos (\theta - \theta_0) + \frac{\mu}{h^2}$$

$$R = \frac{\mu}{h^2} \left[\left(\frac{R_0 h^2}{\mu} - 1 \right) \cos (\theta - \theta_0) + 1 \right]$$

$$\frac{1}{R} = r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + \left(\frac{R_0 h^2}{\mu} - 1 \right) \cos (\theta - \theta_0)}$$

Si: $\frac{h^2}{\mu} = P$ $\left(\frac{R_0 h^2}{\mu} - 1 \right) = e$

$$r = \frac{P}{1 + e \cos (\theta - \theta_0)} \quad \text{ecuación polar de una cónica.}$$

para la elipse $P = a(1 - e^2)$

luego $\frac{h^2}{\mu} = a(1 - e^2)$

sustituyendo en: $\frac{R_0 h^2}{\mu} - 1 = e$

$$R_0 = \frac{e + 1}{\frac{h^2}{\mu}} = \frac{e + 1}{a(1 - e^2)}$$

$$R_0 = \frac{1}{a(1 - e)}$$

luego en el perihelio $r_0 = a(1 - e)$